

**INSTYTUT FIZYKI PLAZMY I LASEROWEJ MIKROSYNTEZY**

**Praca doktorska**

**MODELOWANIE WYŁADOWAŃ TYPU Z-PINCH i PLASMA FOCUS**

**Włodzimierz Stępniewski**

**Praca wykonana  
w Zakładzie Analiz Teoretycznych**

**Promotor pracy:  
Dr hab. inż. Roman Zagórski**

**Warszawa 2018**

*Dziękuję:*

*Prof. dr. hab. inż. Karolowi Jachowi za wszystko co od niego otrzymałem*

*Prof. dr hab. M. J. Sadowskiemu za inspiracje do pisania pracy*

*Dr G. V. Ivanenkov z Instytutu Fizyki RAN za wieloletnią, owocną współpracę*

*Mgr inż. W. Kossakowskiemu za wspólną pracę nad modelem niejawnym*

*Koleżankom i Kolegom z Zakładu za wszechstronną pomoc*

*Mojej żonie Teresie za wsparcie i wyrozumiałość*

## Streszczenie

W pracy przedstawiono opis modelu i wyniki symulacji ewolucji dwóch charakterystycznych układów opartych na efekcie pinchu: układu X-pinch (skrzyżowane druciki) i urządzenia Plasma Focus. W pierwszej części pracy przedstawiono modele fizyczne użyte do symulacji ewolucji plazmy w tych układach. Podstawą opisu jest model nieidealnej magnetohydrodynamiki MHD.

Do układu równań MHD, koniecznych dla opisu ewolucji plazmy w układzie X-pinch dołączono procesy atomowe: transport promieniowania w przybliżeniu dyfuzyjnym (model temperatury radiacyjnej) i niestacjonarną jonizację. Dla urządzenia Plasma Focus uwzględniono wpływ neutralów na transport i równanie obwodu elektrycznego. Opisane są warunki brzegowe przyjęte dla obu układów. W dalszej części przedstawiony jest model numeryczny oparty na metodzie cząstek swobodnych. Pokazane są algorytmy wyznaczania pochodnych, w podejściu jawnym i niejawnym, różne sposoby uwzględniania warunków brzegowych oraz metodyka stosowana dla rozwiązywania równania kinetyki jonizacji.

Wyniki symulacji dla różnych układów przedstawione są w sposób chronologiczny, ilustrujący rozwój kodu.

## SPIS TREŚCI

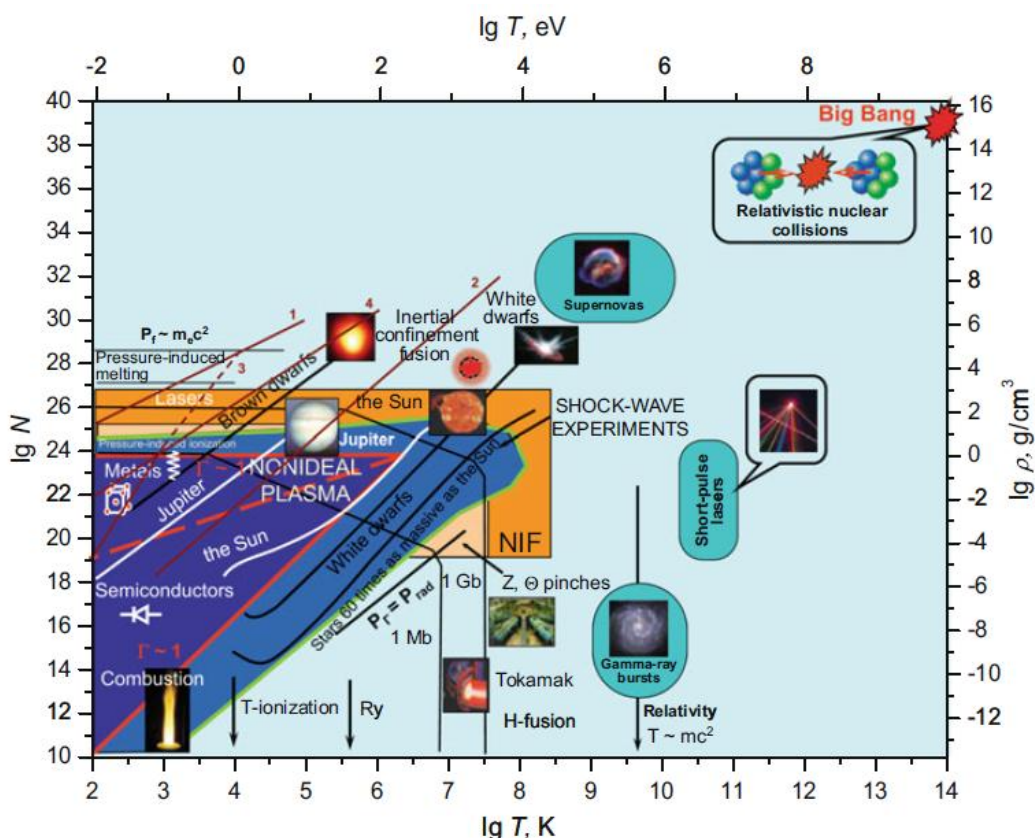
1. Wstęp .....	5
2. Cel pracy .....	9
3. Układy oparte na zasadzie pinchu .....	10
3.1 Układy typu Plasma-Focus .....	12
3.2 Układy z eksplodującym drutem (exploding wires) .....	15
4. Modele magnetohydrodynamiczne (MHD) .....	17
4.1 Układ równań nieidealnej magnetohydrodynamiki (MHD) .....	17
4.2 Współczynniki transportu .....	23
4.3 Równania stanu .....	27
4.4 Równania MHD dla układu z-pinch .....	29
4.5 Równania MHD z uwzględnieniem jonizacji .....	31
4.6 Warunki brzegowe .....	34
4.7 Warunki stosowalności przybliżenia MHD .....	38
4.8 Przybliżenie dyfuzyjne dla transportu promieniowania .....	41
5. Opis modelu numerycznego .....	46
6. Wyniki symulacji .....	57
6.1 Symulacje eksplodującego drutu .....	57
6.2 Symulacje układu x-pinch .....	66
6.3 Symulacja fali spalania termojądrowego w z-pinchu .....	78
6.4 Modelowanie plazmy w układzie Plasma Focus .....	79
6.5 Zastosowanie metody do symulacji obszaru ergodycznego dywertora tokmaka TEXTOR .....	85
7. Podsumowanie .....	88
8. Literatura .....	89

# 1. Wstęp

Pojęcie plazmy wprowadził 90 lat temu Langmuir na określenie zjonizowanego, dobrze przewodzącego i elektrycznie neutralnego gazu. Plazma powstaje po podgrzaniu ośrodka do dostatecznie wysokiej temperatury, kiedy elektrony odrywają się od jąder i zachodzi jonizacja. Przez analogie plazma nazywana bywa często 4 stanem materii.

Plazma to mieszanina dodatnich jonów i ujemnych elektronów, w której zachowana jest quasi-neutralność ładunkowa. Cząstki naładowane poruszają się kolektywnie i oddziałują między sobą za pomocą długo-zasięgowych sił elektromagnetycznych. W rezultacie takich oddziaływań mogą się pojawić całkiem nowe efekty - zjawiska falowe i różnego rodzaju niestabilności [1].

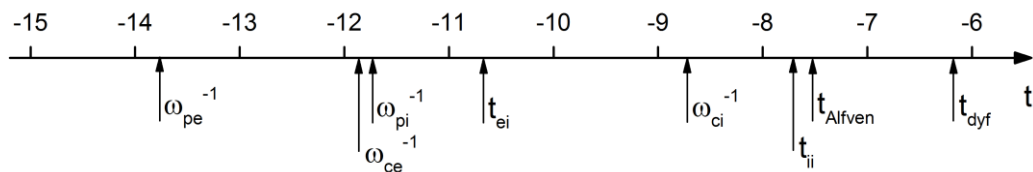
W stanie plazmy znajduje się 99% obserwowanej materii we Wszechświecie. Na Ziemi w sposób naturalny pojawia się ona w wyładowaniach atmosferycznych. W laboratoriach wytwarzana jest w różnego typu wyładowaniach elektrycznych lub przy oddziaływaniu silnego lasera na materiały. Zainteresowanie plazmą gwałtownie wzrosło po rozpoczęciu prac na kontrolowanej syntezie termojądrowej. Reakcje między jądrami izotopów wodoru - deuteru i trytu zachodzą efektywnie w plazmie przy temperaturach milionów stopni. Zakres parametrów plazmy występującej w przyrodzie i w laboratoriach pokazano na Rys 1.1.



Rys. 1.1 Diagram stanów fazowych materii [2] 1 – granica obszaru degeneracji 2 – granica obszaru idealności plazmy 3 - krzywa topienia.

Badania nad kontrolowaną syntezą termojądrową, która mogłaby być źródłem energii na następne stulecia są wielkim wyzwaniem dla ludzkości. To poważny problem naukowy i techniczny w rozwiązaniu, którego zaangażowane są wielkie międzynarodowe zespoły badawcze i ogromne środki finansowe (program ITER, NIF) [3]. Istotnym wsparciem dla badań eksperymentalnych w zakresie fizyki plazmy jest modelowanie numeryczne. Podstawowe równania opisujące dynamikę plazmy -równania Maxwella, równania kinetyczne czy równania hydrodynamiki (magnetohydrodynamiki) są dobrze znane, ale rozwiązanie ich dla realnych warunków eksperymentalnych to wyjątkowo złożony problem.

Analitycznie można uzyskać rozwiązania tylko dla bardzo uproszczonych modeli. Dzięki rozwojowi komputerów i metod obliczeniowych można modelować zjawiska w plazmie w różnej skali przestrzennej i czasowej. W zależności od przyjętej skali stosuje się różne opisy plazmy. Zakres zmian charakterystycznych parametrów przestrzennych i czasowych plazmy dla warunków końcowej fazy ewolucji układu Plasma Focus pokazuje Rys 1.2



*Rys. 1.2 Charakterystyczne czasy w plazmie dla parametrów końcowej fazy pinchu na układzie Plasma Focus*

Modelowanie komputerowe zjawisk w plazmie wymaga największych komputerów i ma już swoją historię. Stanowi ono pomost pomiędzy eksperymentem a teorią. W zależności od skali czasowej i przestrzennej oraz wpływu zderzeń stosuje się różny opis.

*Tab 1.1 Zestawienie modeli opisujących plazmę*

Opis kinetyczny	Opis uśredniony
Model cząstki próbnej	Model hybrydowy:
Model dryfowy	- jony opis kinetyczny
Model Cząstek w komórce PIC	- zamagnesowane elektrony opis płynowy
Opis za pomocą funkcji rozkładu	Anizotropowa MHD model CGL
Bezzderzeniowe Równanie Własowa	Idealna MHD
Równanie Boltzmann	Jedno - płynowa MHD
Równanie Fokkera-Plancka	Dwu - płynowa nieidealna MHD
	Elektronowa MHD:
	-elektrony opis samouzgodniony z polem
	-jony nieruchome tło

W Tab. 1.1 przedstawiono modele stosowane w opisie zjawisk w o różnej skali czasowej i przestrzennej. Najprostszym modelem kinetycznym jest model cząstki

próbnej. Naładowana cząstka porusza się w zewnętrznych polach elektrycznych i magnetycznych, oddziałując za pośrednictwem sił kulombowskich z główną plazmą. Nie wpływa ona na parametry plazmy ani na rozkłady pól. W przypadku większej skali czasowej i przestrzennej ruch cząstki opisywany jest równaniami dryftowymi. Generując odpowiednio dużą liczbę cząstek o zadanych rozkładach parametrów początkowych (metodyka Monte Carlo) można opisać wpływ plazmy na generowane w niej szybkie cząstki. Rozwinięciem tego podejścia jest metoda cząstek w komórce PIC opisująca, po dołączeniu równań Maxwella, w sposób samouzgodniony plazmę bezzderzeniową.

Do symulacji fundamentalnych zjawisk w plazmie służą modele kinetyczne w których plazma opisywana jest za pomocą funkcji rozkładu w 6 wymiarowej przestrzeni fazowej. Podstawowe równanie kinetyczne dla plazmy to równanie Boltzmana z odpowiednią całką zderzeń, która uwzględnia specyfikę oddziaływań kulombowskich.

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} + \frac{F_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = St f_\alpha \quad (1.1)$$

gdzie  $f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$  funkcja rozkładu cząstek typu  $\alpha = i, e$ ;  $F_\alpha$  siła działająca na cząstki  $\alpha$   $St f_\alpha$  człon zderzeniowy (całka zderzeń) uwzględniający zderzenia dwucząstkowe między cząstkami tego samego rodzaju jak i z innymi cząstkami.

Równanie to służy do opisu zjawisk transportu w plazmie zderzeniowej. W przypadku rzadkiej plazmy zderzenia są zaniedbywalne. Cząstki oddziałują między sobą poprzez samouzgodnione pola elektryczne i magnetyczne wyznaczone z równań Maxwella. Takie bezzderzeniowe równanie kinetyczne nazywane jest równaniem Własowa.

Najbardziej rozpowszechnioną metodą rozwiązywania zagadnień bezzderzeniowej plazmy jest metoda cząstek w komórce - PIC. W metodzie tej traktujemy plazmę jak zbiór modelowych cząstek, trajektorie których są charakterystykami równania Własowa. Ruch cząstek opisywany jest równaniem ruchu z samo-uzgodnionymi polami elektrycznym i magnetycznym. Pola opisywane są równaniami Maxwella, w których źródłami są gęstości ładunku i prądu. Gęstości te wyznacza się na podstawie znajomości położeń i prędkości cząstek za pomocą procedury uśredniania na siatce numerycznej. Mimo że ilość cząstek modelowej plazmy jest znacznie mniejsza niż plazmy realnej dynamika cząstek w takiej modelowej plazmie nie zmienia się. Parametrem określającym jakość przybliżenia jest stosunek gęstości realnej plazmy  $n$  i plazmy modelowej  $n'$  i  $N = n / n'$ . Parametr plazmowy  $\lambda$  będący ilością cząstek w kuli Debeaya skaluje się w następujący sposób  $\lambda' = n' r_d^3 = \lambda / N$ .

Jak wiadomo zwiększenie ilości cząstek w kuli Debay'a zwiększa stopień bezzderzeniowości plazmy. Widać że plazma modelowa jest w mniejszym stopniu bezzderzeniowa niż plazma realna, ale mimo tego dla wielu zagadnień jest to wystarczające.

W celu uniknięcia wysokiego poziomu szumów związanych z ograniczoną ilością cząstek stosuje się różne metody rozmywania ładunku na siatce numerycznej (metoda PIC). Przy ograniczonych mocach obliczeniowych poważnym problemem było

uwzględnienie realnego stosunku mas elektronów i jonów. Dzięki możliwością zrownoleglenia na dużych superkomputerach obecnie nie stanowi to już problemu.

Metody cząstek wykorzystywane są głównie do modelowania podstawowych zjawisk w plazmie, czy oddziaływania promieniowania elektromagnetycznego z plazmą. Metody oparte na opisie kinetycznym są bardzo złożone i dostarczają sporo informacji, którą trudno zinterpretować. Dla wielu procesów zachodzących w plazmie opis kinetyczny jest zbyt szczegółowy.

Może on być zamieniony uśrednionym opisem ewolucji momentów funkcji rozkładu, uzyskanych za pomocą uśrednienia po prędkościach. Uzyskujemy w ten sposób układ równań hydrodynamiki, w którym kolejne momenty zależą teraz tylko od zmiennych przestrzennych. Problemem jest uzyskanie zamkniętego układu równań i określenie granic jego stosowalności.

W plazmie, w której występują pola magnetyczne i prądy otrzymujemy układ równań magneto hydrodynamiki (MHD) [4], [5], [6]. Układ równań MHD będzie przedstawiony w 4 rozdziale pracy. Jego stosowalność zależy od stosunku skali czasowej zjawiska do charakterystycznych czasów w plazmie.

W zależności od stosunku charakterystycznego czasu zjawiska do czasów mikroskopowych i roli efektów dyssypacyjnych stosuje się różne wersje przybliżenia MHD.

Opis magneto hydrodynamiczny stosuje się do opisu ewolucji plazmy w układach termojądrowych oraz dla plazmy kosmicznej. W zależności od potrzeb przyjmuje się różne przybliżenia. Najczęściej stosowany jest układ równań idealnej MHD, ze złożoną topologią pola magnetycznego. Przykładem jego zastosowań jest wyznaczanie rozkładu równowagowego plazmy i pola magnetycznego w układach toroidalnych.

Do modelowania układów dynamicznych np. eksperymentów z plazmą laserową czy plazmą wytwarzaną w wyładowaniach silnoprądowych konieczne jest uwzględnienie pełnych równań wraz z opisem procesów atomowych - transportem promieniowania i jonizacją. Każde z tych zagadnień wymaga specyficznych metod numerycznych. Modele uwzględniające wpływ promieniowania na dynamikę plazmy noszą nazwę radiacyjnej MHD (RMHD).

Rozwój modeli komputerowych związany jest ściśle ze wzrostem mocy obliczeniowej komputerów. Ważnym parametrem określającym model jest ilość zmiennych przestrzennych użytych do opisu. Obecnie standardowe są modele dwuwymiarowe.

W największych ośrodkach plazmowych na świecie opracowano już modele trójwymiarowe. Takie zaawansowane modele komputerowe pozwalają na przeprowadzanie wirtualnych (numerycznych) eksperymentów unikając dzięki temu budowy kosztownych urządzeń. Interesującym obiektem do symulacji komputerowych są różne układy oparte na efekcie z-pinchu. Przebieg zjawiska pinchu ma charakter dynamiczny. Grają w nim istotną rolę efekty dwuwymiarowe (niestabilności przewężeniowe). Ważny jest też w niektórych z nich wpływ zjawisk atomowych i transportu promieniowania. Opracowanie takiego kodu uwzględniającego wszystkie te efekty to spore wyzwanie.



## 2. Cel pracy

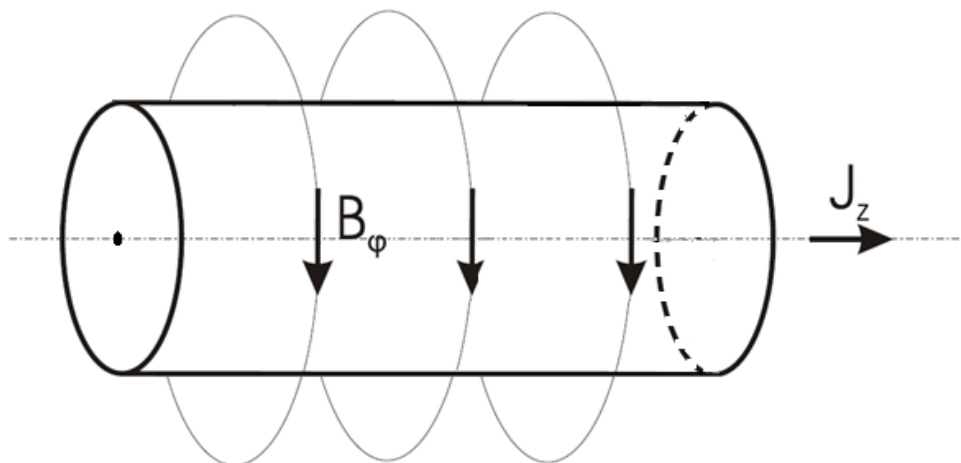
Symulacja dynamiki plazmy w układzie z-pinch i Plasma Focus jest nadal wyzwaniem. Rozwijane są modele fizyczne i udoskonalane metody numeryczne. Eksperymenty dostarczają coraz większej ilości, coraz bardziej szczegółowych informacji o parametrach plazmy.

Motywy do rozwoju kodów numerycznych jest chęć uzyskania lepszej zgodności wyników symulacji z pomiarami eksperymentalnymi. Zwiększa to wiarygodność wyników obliczeń i umożliwia lepsze poznanie zjawiska oraz planowanie następnych eksperymentów. Celem pracy jest pokazanie przydatności zmodyfikowanej metody cząstek swobodnych do modelowania dynamiki plazmy w różnych układach typu z-pinch.

Opracowałem kilka wersji kodu, którymi można opisywać dynamikę plazmy w różnych układach opartych na zasadzie z-pinchu: urządzeniu Plasma Focus, układzie X-pinch, eksplodujący drut., z-pinch ze spalaniem termojądrowym. Kod zbudowany jest w oparciu o model fizyczny wykorzystujący równania dwu-płynowej magnetohydrodynamiki, z uwzględnieniem procesów atomowych (jonizacja, transport promieniowania). Istotne jest dołączenie realistycznych warunków brzegowych na swobodnym brzegu i na elektrodach. Przyjęto dwuwymiarową symetrię cylindryczną w zmiennych  $(r,z)$ . Takie kody nazywane są kodami dwuwymiarowymi (2D). Obliczenia prowadzono dla warunków realnych eksperymentów. Wyniki pokazały dobrą zgodność z eksperymentem i były publikowane. Podobnego rodzaju kodów [7 - 13] nie ma zbyt wiele na świecie. Są one rozwijane tylko w największych laboratoriach przez duże zespoły.

### 3. Układy oparte na zasadzie pinchu

Efekt pinchu (ang. pinch - ściskanie) to samozaciskanie się kolumny plazmy z prądem płynącym w kierunku osi z. Zaciskanie to powoduje siła Lorentza, wytwarzana przez prąd oddziaływający z własnym polem magnetycznym (Rys.3.1).



Rys. 3.1 Schemat układu z-pinch

Pierwszą pracą dotyczącą pinchu jest teoretyczna praca Benneta [14] w której opisał on stacjonarny efekt pinchu i podał warunki jego równowagi. Z pracy tej pochodzi podstawowy wzór wiążący parametry pinchu w równowadze

$$I^2 = 4 c^2 N k T$$

3.1

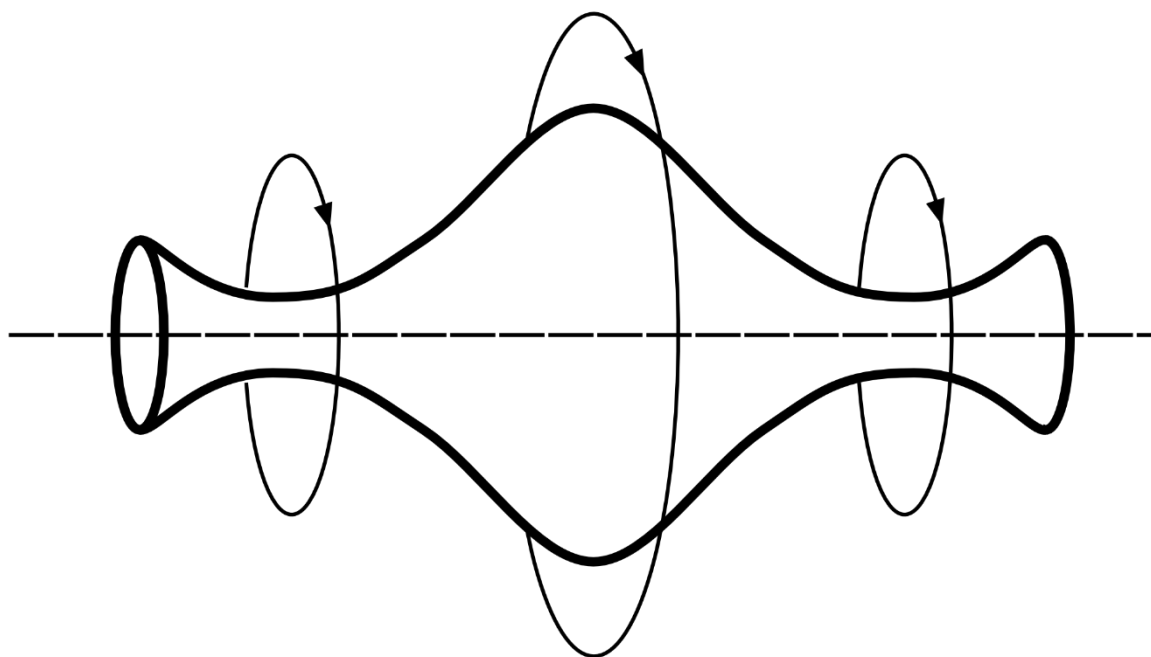
gdzie  $I$  - prąd pinchu,  $N$  - gęstość liniowa,  $T$  - temperatura.

Eksperymentalne badanie zjawiska pinchu rozpoczęto po II wojnie światowej w ramach prac na kontrolowaną syntezę termojądrową w USA, Anglii i w b. Związku Radzieckim. Były to wtedy prace tajne. Pierwszymi układami były liniowe dynamiczne układy typu z-pinch.

W układach tych zjawiska zachodzą w komorze wypełnionej gazem roboczym (deuterem) w której inicjowane jest wyładowanie elektryczne między liniowymi elektrodami. Wyładowanie rozpoczyna się przy dielektrycznych ściankach komory. Po osiągnięciu dostatecznej jonizacji tworzy się przy ściance warstwa plazmy, w której zaczyna płynąć prąd (warstwa prądowa). Gdy wartość prądu jest dostatecznie duża siła Lorentza odrywa warstwę od ścianki i następuje jej ruch do osi. W czasie swojego ruchu warstwa zbiera i jonizuje gaz. W końcowej fazie tworzy na osi kolumna plazmowa - pinch. Plazma w trakcie zbiegania nagrzewa się i osiąga maksymalne parametry w fazie pinchu (dla gazowego pinchu - temperatura  $\sim 1-2$  keV gęstość  $10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ).

W tych układach zarejestrowano pierwsze neutrony z reakcji D-D. Wywołało to początkowo wielkie nadzieje na szybkie opanowanie reakcji termojądrowych. Sądzono, że zjawiska w pinchu mają charakter quasistacjonarny. Szacunki opierające się na zależności Benneta pokazują, że przy prądzie 1 MA i gęstości  $10^{17} \text{ cm}^{-3}$  można utrzymać plazmę o temperaturze  $1.8 \cdot 10^8 \text{ K}$  (15 keV). W takiej plazmie intensywnie zachodzą reakcje termojądrowe.

Niestety dość szybko okazało się, że neutrony pochodzą z reakcji małej grupy jonów o dużych energiach z jonami głównej części plazmy (reakcja typu wiązka -tarcza), które nie dają nadziei na dodatni bilans energii. Neutronom towarzyszy emisja twardego promieniowania rentgenowskiego. Zarejestrowano za pomocą szybkiej fotografii pojawienie się makroskopowych niestabilności magneto hydrodynamicznych typu  $m=0$  (niestabilność przewężeniowa Rys.3.2) i  $m=1$  (niestabilność typu żmijki). Prowadzą one do ograniczenia czasu życia pinchu poprzez rozerwanie sznura plazmowego i szybki rozlot plazmy na ściankę komory. Są one odpowiedzialne za procesy akceleracji cząstek w plazmie [15].



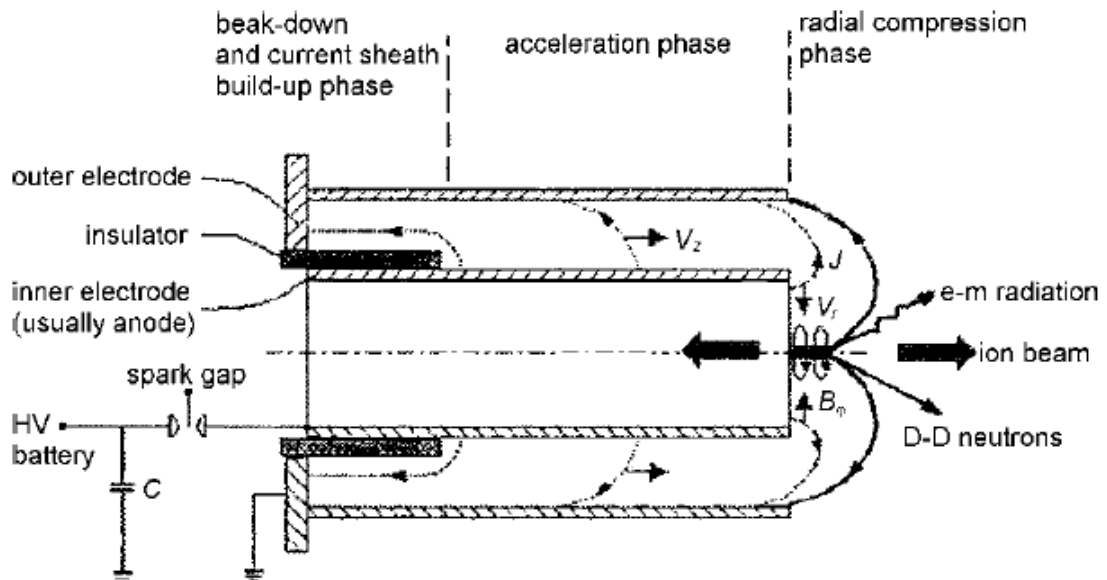
*Rys. 3.2 Niestabilność przewężeniowa (typu  $m=0$ ) w Z-pinchu*

Następnym niekorzystnym czynnikiem okazały się straty energii spowodowane zanieczyszczeniem plazmy domieszkami z pochodzącymi z izolatora i elektrod, które promieniując powodują ochłodzenie plazmy oraz wystąpienie powtórnych przebiegów. Próby stabilizacji niestabilności zewnętrznym polem magnetycznym nie poprawiły znacząco możliwości układów z-pinch. Wszystko to spowodowało zmniejszenie się zainteresowania tymi układami jako urządzeniami termojądrowymi. Jednak cały czas prowadzone były badania różnych ich modyfikacji. Renesans zainteresowania układami z-pinch nastąpił pod koniec lat 80 XX wieku w związku z rozwojem techniki silnoprądowej [16], [17]. Obecne wysokonapięciowe generatory silnoprądowe dają prąd do 30 MA w czasie rzędu 100 ns : układ Z w Sandia Laboratory ( USA) [18], układ Angara-

5 [19] w Troitsku Rosja. Na układach tych stały się możliwe eksperymenty z kompresją siatki złożonej z cienkich drucików z materiału o dużym  $Z$  ( tzw. wire array). Dzięki silnej i jednorodnej kompresji udało się uzyskać bardzo silny impuls miękkiego promieniowania X w krótkim impulsie (230 TW w 5 ns) ze sprawnością około 15%. Zmieniła się koncepcja wykorzystania z-pinchu dla osiągnięcia syntezy termojądrowej. Planuje się teraz wykorzystanie silnego impulsu promieniowania X dla grzania pośredniego tarcz typu hohlraum podobnie jak w inercyjnej syntezie laserowej. Rozpatrywane jest też podejście pośrednie między inercyjnym a magnetycznym utrzymaniem plazmy tzw. MICF, w którym ściskana prądem cienka powłoka cylindryczna tzw. liner w układzie z-pinch komprimuje plazmę z zewnętrznym polem magnetycznym  $B_z$ . Dodatkowo w końcowym momencie ściśnięta plazma jest dogrzewana impulsem laserowym [20].

### 3.1 Układy typu Plasma-Focus

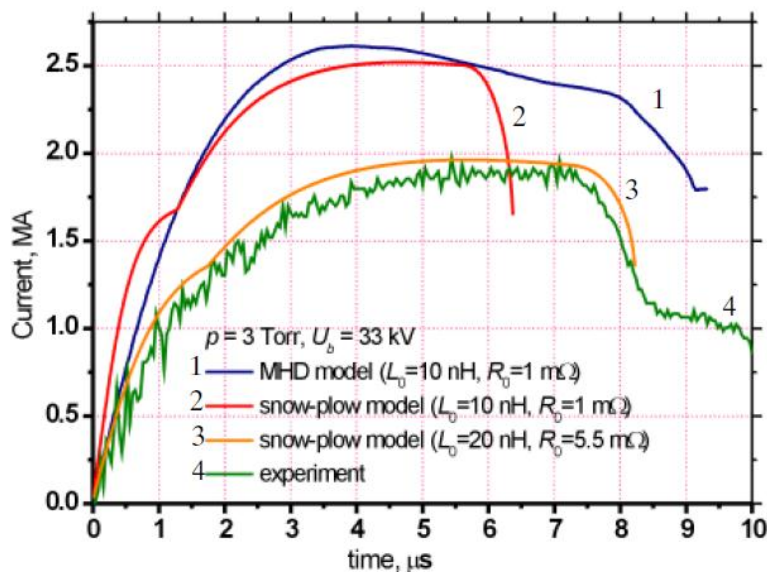
Efekt modyfikacji z-pinchu było powstanie układów typu Plasma Focus. Zostały one wynalezione niezależnie w Związku Radzieckim przez N. V. Fillipova i w Stanach Zjednoczonych przez J.W. Mathera [21],[22]. Zasada działania w obu przypadkach była ta sama, a układy różniły się geometrycznymi proporcjami długości i średnic elektrod. Oba typy układów Plasma Focus noszą obecnie nazwiska ich twórców. Układ ten (Rys.3.3) składa się z dwóch cylindrycznych elektrod rozdzielonych izolatorem. Elektrody umieszczone są wewnątrz komory wypełnionej gazem roboczym (deuterem) o odpowiednim ciśnieniu. Elektroda wewnętrzna jest anodą.



Rys. 3.3 Schemat układu Plasma-Focus typu Mathera [23]

Po przyłożeniu napięcia w obszarze w pobliżu izolatora, gdzie występują największe niejednorodności pola elektrycznego rozpoczyna się proces przebicia. W wyniku niego formuje się przy izolatorze warstwa częściowo zjonizowanego gazu, przez

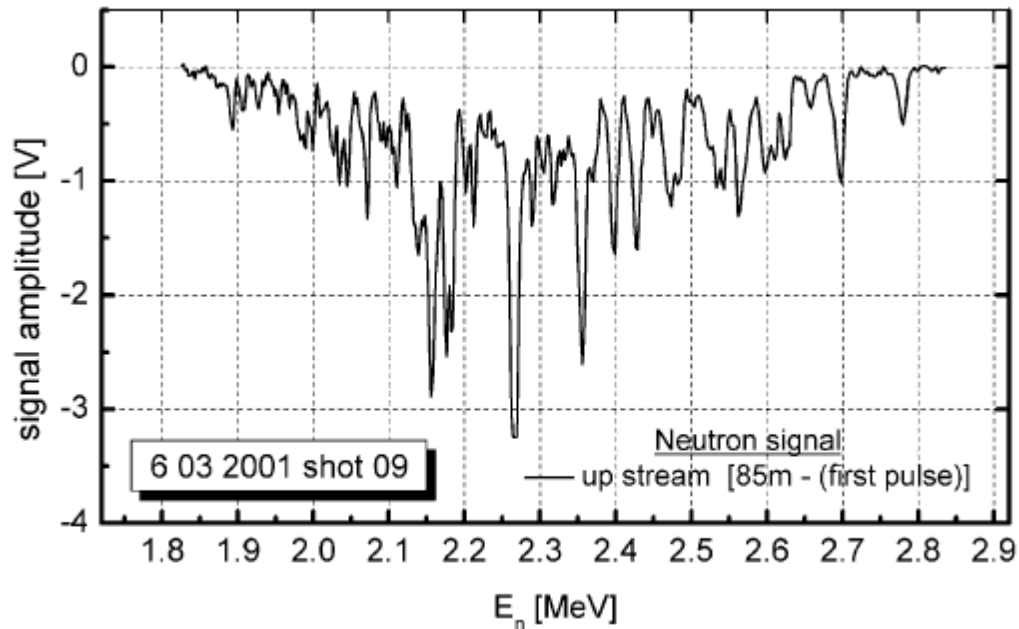
który zaczyna płynąć prąd. Następuje dalsza jonizacja i wzrost prądu. Gdy prąd osiąga dostateczną wartość siła elektrodynamiczna odrywa warstwę prądową od izolatora. Pod wpływem siły warstwa porusza się wzdłuż elektrod zgarniając i jonizując gaz przed nią. Przed warstwą prądową tworzy się fala uderzeniowa. Kształt poruszającej się warstwy określony jest przez warunki równowagi siły elektrodynamicznej i sił bezwładności gazu. Ta faza zjawiska nazywana jest fazą akceleracji. W fazie tej obserwuje się regularną kątową strukturę warstwy prądowej - charakterystyczne filamenty, które są efektem niestabilności spowodowanych skończoną opornością plazmy i niepełną jonizacją. Po dojściu do końca anody zmienia się charakter ruchu. Warstwa zaczyna poruszać się w kierunku osi układu równocześnie wydłużając się w kierunku osi z. Na prądzie pojawia się charakterystyczne załamanie spowodowane szybkim narastaniem indukcyjności Rys. 3.4.



Rys. 3.4 Przebieg prądu na układzie PF-1000 w porównaniu do wyników z różnych modeli numerycznych [23]

Faza ta nosi nazwę fazy kolapsu. Przy schodzeniu do osi prędkość warstwy prądowej narasta. Po dojściu warstwy prądowej do osi zaczyna się tworzyć kolumna plazmowa. Energia kinetyczna hamującej warstwy prądowej jest rozpraszana poprzez lepkość, co prowadzi do silnego nagrzewania jonów. W następnej fazie kolumna plazmowa rozszerza się i ponownie zaciska. Spowodowane jest to silnym wypływem plazmy wzdłuż osi. W pinchu spada gęstość liniowa (ilość cząstek w przekroju) i mogą być osiągnięte warunki rozwoju mikrostabilności prądowych prowadzących do dodatkowego grzania plazmy i akceleracji cząstek. W trakcie drugiego zaciśnięcia obserwuje się silną emisję neutronów i rejestruje deuterony o energiach powyżej 1 MeV. Emisji neutronów towarzyszy impuls twardego promieniowania X. Maksima na widmach energetycznych neutronów z reakcji D-D mierzone w kierunku w przód i do tyłu względem kierunku przepływu prądu wykazują przesunięcie względem energii 2.45 MeV (Rys 3.5). Fakty te świadczą o tym, że obserwowane neutrony pochodzą z reakcji niewielkiej ilości przyspieszonych do dużych energii (średnio około 60 kV) deuteronów

z pozostały deuteronami zarówno w plazmie jak i w gazie. Układ Plasma Focus ze względu na dwuwymiarowy charakter ewolucji plazmy w trakcie wyładowania i złożony opis fizyczny jest interesującym obiektem dla symulacji komputerowych zarówno dla wielowymiarowych kodów MHD [25 - 30] jak i dla modeli uproszczonych [31] i kodów kinetycznych [32].



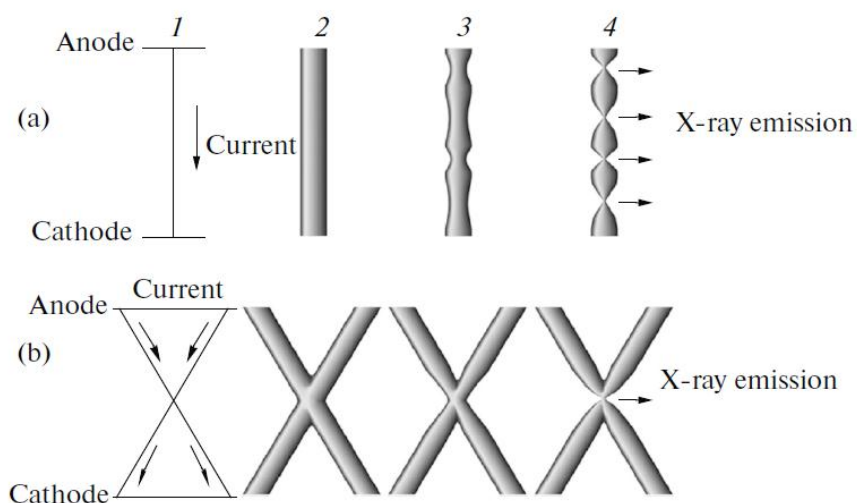
*Rys. 3.5. Widmo neutronów na układzie PF-1000 (strzał 0603-09) mierzony w kierunku do tyłu (od strony anody). Widać, że maksimum energii 2.2-2.3 MeV jest mniejsza o 2.45 MeV wynikającej z bilansu energii dla reakcji DD [24]*

### 3.2 Układy z eksplodującym drutem (*exploding wires*)

Zjawisko eksplozji przewodnika (cienkiego drucika) to proces gwałtownego rozszerzania się materiału przewodnika na skutek jego intensywnego nagrzewania omowego w trakcie przepływu impulsu prądowego. Towarzyszy temu zjawisku silny wzrost oporu elektrycznego i intensywne świecenie. Eksplozje przewodnika było obserwowane już w końcu XVII wieku. Rozwój techniki wysokonapięciowych generatorów silnoprądowych spowodował wzrost zainteresowanie zjawiskiem bardzo szybkiej, nanosekundowej eksplozji przewodnika. Badania te związane są z pracami nad inercyjną syntezą termojądrową. Zwiększono do ponad 100 ilość jednocześnie eksplodujących drucików. Zebrane one były w cylindryczną siatkę tworząc po eksplozji plazmową warstwę - liner. Pozwoliło to osiągnąć na układzie Z-1 W Sandii rekordowe wyjście promieniowania rentgenowskiego ponad 2 MJ (200 TW) [33].

Zjawisko eksplozji przewodnika przebiega w kilku etapach. W pierwszej fazie nagrzewa się metal w stanie stałym. Następnie ulega on stopieniu. Proces topienia zachodzi izotermicznie. Po całkowitym przejściu metalu w stan płynny nagrzewa się on takich temperatur, iż zaczyna zachodzić intensywne powstawanie pęcherzyków par. Metal paruje zarówno z powierzchni, jak i z wnętrza materiału. Tworzą się w tej fazie poprzeczne do kierunku prądu, warstwy materiału o różnej gęstości tzw. "straty". Można teraz wyróżnić rzadką koronę tj. zewnętrzną warstwę utworzoną przez pary metalu i gęsty rdzeń. W materiale korony następuje jonizacja. W zależności od szybkości narastania prądu obserwuje się albo gwałtowny rozlot, albo stagnację kolumny. W drugim przypadku dyfundujący w głąb przewodnika prąd nagrzewa i odparowuje kolejne warstwy metalu tworząc na granicy rdzeń- korona słabo przewodzący obszar par metalu. Gęstość korony na skutek wolnego rozlotu spada dzięki czemu następuje proces przebicia par metalu (szybka jonizacja) i prąd zaczyna teraz płynąć przez koronę. Jeśli prąd jest dostatecznie duży może spowodować zaciskanie gęstego rdzenia. Materia w nim nagrzewa się i jonizuje. Parametry końcowe zjonizowanej plazmy są bardzo wysokie; z pomiarów i szacunków dla eksperymentu z siatką drucików stalowych na układzie ZR w Sandii wynika, że temperatura elektronowa wynosi około 3keV, stopień jonizacji  $Z=14$  a temperatura jonowa w momencie stagnacji z założenia termalizacji prędkości wynosi  $T_i^{eff} = 31$  keV [34].

Bardzo ciekawym układem jest tzw. X-pinch [35]. Powstaje on przy skrzyżowaniu jednego lub więcej drucików między elektrodami układu dużej mocy Rys. 3.6. Prąd w miejscu przecięcia jest sumą prądów z poszczególnych drucików. Ciśnienie magnetyczne w tym miejscu jest większe w porównaniu z pojedynczym drucikiem co prowadzi do powstania zlokalizowanej kolumny mini z-pinchu o długości kilkuset mikrometrów. Kolumna ta jest dalej ściskana i w końcowej fazie jest źródłem intensywnego (subnanosekundowego), zlokalizowanego, miękkiego (1-10 keV) promieniowania X. Promieniowanie rentgenowskie emitowane z układu X-pinchu wykorzystywany jest do prześwietlania innych obiektów plazmowych (tarcz w eksperymentach syntezy laserowej, eksplodujących drutów).



*Rys. 3.6 Schemat ilustrujący ideę układu x-pinch. Rozwój pinchu: a) dla pojedynczego drucika b) dla skrzyżowanych drucików [36]*



## 4. Modele magnetohydrodynamiczne (MHD)

Równania kinetyczne są bardzo złożone i można je rozwiązać tylko dla niewielkiej klasy, prostych zagadnień. Dostarczają one ogromną ilość często zbyt szczegółowej informacji. Dla opisu wielu zjawisk wystarczy opis uśredniony, uzyskany za pomocą momentów funkcji rozkładu, który prowadzi do równań płynowych - (magnetohydrodynamicznych).

### 4.1 Układ równań nieidealnej magnetohydrodynamiki (MHD)

Równania płynowe wyprowadza się z równania kinetycznego różnymi metodami - metodą Chapmana-Enskogo i metodą Grada [5]. W metodzie Chapmana-Enskogo zakłada się, że funkcje rozkładu słabo różnią się od rozkładów równowagowych. Równowagowe rozkłady Maxwella są rozwiązaniami równania kinetycznego w przypadku, gdy wszystkie gradienty przestrzenne i pochodna czasowa są równe zero. Dla plazmy składającej się dwóch składowych - elektronów i jonów mamy 4 typy zderzeń e - e, e-i, i-i oraz i-e. W gazie elektronowym maxwelska funkcja rozkładu prędkości ustala się dzięki zderzeniom e-e i e-i w czasie [6]:

$$\tau_e = \frac{3\sqrt{m_e}kT_e^{3/2}}{4\sqrt{\pi}n_e e^4 \ln \Lambda_{ei}} \quad (4.1)$$

W plazmie rozkład równowagowy jest osiągnany na skutek zderzeń e-i, oraz i-i w czasie:

$$\tau_{ii} = \frac{3\sqrt{m_i} T_i^{3/2}}{4\pi\sqrt{2} Z^4 e^4 \lambda_{ii} n_i} \quad (4.2)$$

Wyrównywanie temperatur między jonami a elektronami zachodzi dzięki zderzeniom e-i, i-e w charakterystycznym czasie:

$$\tau_T = \frac{m_i T_e^{3/2}}{\pi\sqrt{2} Z^4 e^4 \lambda_{ei} n_i} \quad (4.3)$$

gdzie:  $n_i$  - koncentracja jonów,  $Z$ - średni stopień jonizacji,  $\lambda_{ei}$ ,  $\lambda_{ii}$  - logarytmy kulombowskie dla zderzeń e-i oraz i-i.

Charakterystyczną cechą całkowicie zjonizowanej plazmy jest duża różnica mas jej składowych elektronów i jonów. W wyniku tego cząstki tego samego rodzaju przekazują energie między sobą w czasie znacznie krótszym niż czas wyrównywania temperatur między cząstkami lekkimi i ciężkimi (elektronami i jonami). Równowaga w każdej ze składowych ustala się znacznie szybciej. Między czasami zderzeń zachodzi następująca relacja  $\tau_{ei} < \tau_{ii} < \tau_T$ . Warunkiem stosowalności przybliżenia magnetohydrodynamicznego jest założenie o zderzeniowości plazmy. Dla jonów oznacza to że  $\tau_{ii} \leq t_{char}$  gdzie  $\tau_{ii}$  czas zderzeń jon-jon,  $t_{char}$  charakterystyczny czas zjawiska. Podobny warunek można przyjąć dla elektronów. Można go zapisać w równoważnej postaci  $l_{f,i-i} \leq L$ , gdzie:  $l_{f,i-i}$  droga

swobodna jonów, L rozmiar układu. Podstawowe makroskopowe parametry składowych plazmy - koncentracja cząstek  $n_\alpha$ , gęstość masowa  $\rho_\alpha$ , średnie prędkości  $u_\alpha$  i temperatury  $T_\alpha$  wyrażają się jako momenty funkcji rozkładu.

$$n_\alpha = \int f_\alpha dv \quad (4.4)$$

$$u_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \int v f_\alpha dv \quad (4.5)$$

$$\frac{3}{2} n_\alpha k T_\alpha \frac{m_\alpha}{2} = \int (v - u)^2 f_\alpha dv \quad (4.6)$$

Kolejne wyższe momenty rozkładu określają składowe tensora lepkości  $P_{\alpha kl}$  i strumienia ciepła:

$$P_{\alpha kl} = \int (v_{\alpha k} - u_{\alpha k})(v_{\alpha l} - u_{\alpha l}) f_\alpha dv \quad (4.7)$$

Dla tensora lepkości można wydzielić część diagonalną - ciśnienie składowych plazmy:

$$P_{\alpha kl} = p_\alpha \delta_{kl} + \pi_{\alpha kl} \quad (4.8)$$

Równania dla makroskopowych parametrów plazmy można uzyskać z równania kinetycznego po przemnożeniu przez odpowiednią wielkość i wyciąkowaniu po przestrzeni prędkości. Równania dwupłynowej magnetohydrodynamiki dla całkowicie zjonizowanej plazmy składającej się z elektronów i jonów o ładunku  $Ze$  mają następującą postać:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + (n_e \vec{v}_e) = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + (n_i \vec{v}_i) = 0 \quad (4.10)$$

$$m_e n_e \left( \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \cdot \nabla) \vec{v}_e \right) + \nabla p_e + \nabla \cdot \Pi_e + e n_e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v}_e \times \vec{B} \right) = \vec{R}_{ei} \quad (4.11)$$

$$m_i n_i \left( \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + (\vec{v}_i \cdot \nabla) \vec{v}_i \right) + \nabla p_i + \nabla \cdot \Pi_i - e n_e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v}_i \times \vec{B} \right) = -\vec{R}_{ei} \quad (4.12)$$

$$\frac{3}{2} n_e \left( \frac{\partial k T_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \cdot \nabla) k T_e \right) + p_e \nabla \cdot \vec{v}_e + \nabla \cdot q_e + (\Pi_e : \nabla \vec{v}_e) - Q_e = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{3}{2} n_i \left( \frac{\partial k T_i}{\partial t} + (\vec{v}_i \cdot \nabla) k T_i \right) + p_i \nabla \cdot \vec{v}_i + \nabla \cdot q_i + (\Pi_i : \nabla \vec{v}_i) - Q_i = 0 \quad (4.14)$$

gdzie dolne wskaźniki odnoszą się do składowej elektronowej - e lub jonowej - i ,  $e$  to ładunek elektronu,  $n$  - gęstość,  $\vec{v}$  - prędkość,  $\vec{B}$  - pole magnetyczne,  $\vec{E}$  - pole elektryczne, a  $p_e = n_e kT_e$   $p_i = n_i kT_i$  - ciśnienia elektronów i jonów,  $\Pi_e, \Pi_i$  - składowe tensora lepkości dla elektronów,  $k$  - stała Boltzmanna  $\vec{R}_{ei}$  - szybkość przekazu pędu od elektronów do jonów na skutek zderzeń,  $Q_e, Q_i$  ciepło wydzielane na skutek zderzeń w składowej elektronowej, jonowej.

Pole elektryczne i magnetyczne  $\vec{E}, \vec{B}$  opisywane są równaniami Maxwella:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi e \cdot (n_i - n_e) \quad (4.15)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.16)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} e (n_i \vec{v}_i - n_e \vec{v}_e) \quad (4.17)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.18)$$

Aby zamknąć układ, konieczne jest określenie członów dyssypatywnymi występującymi w równaniach. Najbardziej znane są zależności podane przez S.I Braginskiego [4]. Ten pełny układ równań dwupłynowej magneto hydrodynamiki opisuje zjawiska na bardzo szerokiej skali czasowej i przestrzennej. W składowej elektronowej na skutek małej inercji mogą się rozprzestrzeniać elektronowe fale plazmowe z prędkością termiczną elektronów. Ze względu na ograniczenia, na krok czasowy i nieliniowość równań pełny opis dwupłynowy nie jest używany w dwuwymiarowych symulacjach komputerowych. Bardziej użyteczne w tym wypadku są kody oparte na opisie kinetycznym.

W symulacjach komputerowych, gdzie skala czasowa i przestrzenna jest odpowiednio duża używane są prostsze modele. Przedstawię teraz założenia upraszczające prowadzące do układu równań nieidealnej magneto hydrodynamiki albo magneto hydrodynamiki z efektem Halla. Równania nieidealnej magneto hydrodynamiki są podstawą kodu numerycznego użytego przeze mnie do symulacji dynamiki plazmy w układzie Plasma Focus oraz do modelowania zjawiska x-pinchu.

Równania modelu dwupłynowego można uprościć wprowadzając całkowitą gęstość plazmy  $\rho = n_i m_i + n_e m_e \approx n_i m_i$ , oraz prędkość środka masy:  $\vec{u} = (n_i m_i \vec{u}_i + n_e m_e \vec{u}_e) / (n_i m_i + n_e m_e)$ . Prędkość środka masy ze względu na dużą różnicę mas elektronów i jonów jest równa prędkości jonów.

Istotnym uproszczeniem równań modelu jedno-płynowego jest założenie quasi-neutralności plazmy  $n_i \approx n_e$ . Wynika ono z faktu, iż rozdzielnie jonów od elektronów na odległość większą od długości Debaey'a wymaga energii znacznie większej od energii termicznej plazmy czy energii zgromadzonej w polu magnetycznym. Ze względu na małą masę elektrony poruszają się znacznie szybciej niż jony (aby zneutralizować ładunek

plazmy można pominąć inercję elektronów w przypadku długości charakterystycznej większej od długości Debye'a i czasu charakterystycznego większego od odwrotności częstości plazmowej. Skutkiem tych założeń jest pominięcie w modelu równania Poissona  $\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi e(n_i - n_e)$ . Nie oznacza to że pole, czy jego dywergencja są równe zero a jedynie, że  $\nabla \cdot \vec{E} / (en_e) \ll 1$ . Pole elektryczne jest wyznaczone z innej zależności (prawo Ohma).

Mnożąc równania ciągłości dla elektronów i jonów przez odpowiednie masy, dodając i korzystając z definicji prędkości środka masy otrzymujemy równanie ciągłości dla gęstości plazmy.

Pomijając w równaniu zachowania pędu dla elektronów inercję (lewą stronę równania) i wyznaczając z niego pole elektryczne otrzymuje się prawo Ohma.

Mimo że gęstości elektronów i jonów są prawie równe prędkości elektronów  $\vec{v}_e$  i jonów  $\vec{v}_i$  mogą się znacznie różnić. Gęstość prądu wyznaczana jest teraz z prawa Ampera

Wstawiając wyznaczone z prawa Ohma pole elektryczne do prawa Faraday otrzymujemy równanie ewolucji czasowej dla pola magnetycznego. Jest to równanie dyfuzji pola magnetycznego.

Wprowadzając tzw. pochodną substancjalną (materialną):

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \quad (4.19)$$

Układ równań nieidealnej, dwu-temperaturowej magnetohydrodynamiki MHD dla  $Z=1$  możemy zapisać w postaci:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (4.20)$$

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \Pi + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \quad (4.21)$$

$$\rho c_{ve} \left( \frac{dT_e}{dt} + \vec{v}_e \cdot \nabla T_e \right) = -(B_e + p_e) \nabla \cdot \vec{u}_e - \Pi_e : \nabla \vec{u}_e - \nabla \cdot \vec{q}_e - Q_{ei} + \frac{1}{en_e} \vec{R} \cdot \vec{j} \quad (4.22)$$

$$\rho c_{vi} \frac{dT_i}{dt} = -(B_i + p_i) \nabla \cdot \vec{u} - \Pi_i : \nabla \vec{u} - \nabla \cdot \vec{q}_i + Q_{ei} \quad (4.23)$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \vec{u} \times \vec{B} - \frac{1}{en_e} (\nabla p_e + \nabla \cdot \Pi_e - \vec{R}) + \frac{1}{cen_e} \vec{j} \times \vec{B} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \vec{E} \quad (4.25)$$

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \vec{B} \quad (4.26)$$

$c_{v\gamma} = \frac{\partial E_\gamma}{\partial T_\gamma}$  ( $\gamma = e, i$ ) - ciepło właściwe;  $B_\gamma = \frac{\partial E_\gamma}{\partial \rho_\gamma^{-1}}$ ;  $E_\gamma$  - energia właściwa. Dla plazmy

idealnej mamy  $c_{v\gamma} = \frac{3k}{2m_\gamma}$ ;  $B_\gamma = 0$

$\vec{j} = -en_e(\vec{u}_e - \vec{u}_i) \approx -en_e(\vec{u}_e - \vec{u})$  - gęstość prądu,

$Q_{ei} = \rho c_{ve}(T_e - T_i) / \tau_{ei}$  - szybkość wymiany energii między elektronami i jonami,

$\vec{R}$  - szybkość przekazu pędu od elektronów do jonów, będąca sumą siły tarcia  $\vec{R}_u$  pojawiającej się na skutek względnego ruchu elektronów i jonów i termosiły  $\vec{R}_T$ , która jest spowodowana gradientami temperatury. Z termodynamicznych warunków symetrii wynika że strumień ciepła jest sumą członów zależnych od gradientów temperatury oraz członów zależnych od gęstości prądu.

Korzystając z prawa Ohma i prawa Faradaya możemy otrzymać równanie opisujące ewolucję pola magnetycznego:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \left[ \vec{u} \times \vec{B} + \frac{c}{en_e} (\nabla p_e + \nabla \cdot \Pi_e - \vec{R}) - \frac{1}{cen_e} \vec{j} \times \vec{B} \right] \quad (4.27)$$

W silnym polu magnetycznym promień cyklotronowy dla elektronów może być porównywalny z drogą swobodną. Pole magnetyczne nie wpływa na ruch elektronów wzdłuż pola, za to znacząco ogranicza ich ruch w poprzek pola. Powoduje to anizotropię transportu. Siły tarcia i strumienie ciepła dla elektronów i jonów w polu magnetycznym wyrażają następująco:

$$\vec{R} = \vec{R}_u + \vec{R}_T \quad (4.28)$$

$$\vec{R}_u = en_e (\eta_{\parallel} \vec{j}_{\parallel} + \eta_{\perp} \vec{j}_{\perp} + \eta_{\wedge} \vec{j} \times \vec{b}) \quad (4.29)$$

$$\vec{R}_T = -n_e (\beta_{\parallel} \nabla_{\parallel} T_e + \beta_{\perp} \nabla_{\perp} T_e + \beta_{\wedge} \vec{b} \times \nabla T_e) \quad (4.30)$$

$$\vec{q} = \vec{q}_{eu} + \vec{q}_{eT} \quad (4.31)$$

$$\vec{q}_{eu} = -(\beta_{\parallel} \vec{j}_{\parallel} + \beta_{\perp} \vec{j}_{\perp} + \beta_{\wedge} \vec{b} \times \vec{j}) \frac{kT_e}{en_e} \quad (4.32)$$

$$\vec{q}_{eT} = -\chi_{\parallel}^e \nabla_{\parallel} T_e - \chi_{\perp}^e \nabla_{\perp} T_e - \chi_{\wedge}^e \vec{b} \times \nabla T_e \quad (4.33)$$

$$\vec{q}_{iT} = -\chi_{\parallel}^i \nabla_{\parallel} T_i - \chi_{\perp}^i \nabla_{\perp} T_i - \chi_{\wedge}^i \vec{b} \times \nabla T_i \quad (4.34)$$

gdzie  $\vec{b} = \vec{B} / |\vec{B}|$  jednostkowy wektor o kierunku pola, magnetycznego. Wskaźniki  $\parallel$  i  $\perp$  oznaczają kierunek równoległy i prostopadły do pola magnetycznego. Wyrażenia dla współczynników transportu dla idealnej plazmy podane są w pracach [4], [5] [6]. Są one funkcją stopnia zamagnesowania  $x = \omega\tau$ . Elektrony w warunkach stosowności przybliżenia nieidealnej MHD są bardziej zamagnesowane niż jony.

W modelu korzystam z pracy [5] w której podano analityczne zależności współczynników transportu dla elektronów i jonów od wielkości zamagnesowania oraz stopnia jonizacji.

$$\begin{aligned}\eta_{\parallel} &= \eta_0(1 - p_1 / p_0); \quad \eta_{\perp} = \eta_0(1 - (p_1 p_0 + p_2 x_e^2) / \Delta_e); \quad \eta_{\lambda} = \eta_0 x_e (p_3 + 1.7 x_e^2) / \Delta_e \\ \beta_{\parallel} &= \beta_0 p_4 / p_0; \quad \beta_{\perp} = \beta_0 (p_4 p_0 + p_5 x_e^2) / \Delta_e; \quad \beta_{\lambda} = \beta_0 x_e (p_6 + 1.5 x_e^2) / \Delta_e \\ \chi_{\parallel}^e &= \chi_0^e p_7 / p_0; \quad \chi_{\perp}^e = \chi_0^e (p_7 p_0 + p_8 x_e^2) / \Delta_e; \quad \chi_{\lambda}^e = \chi_0^e x_e (p_9 + 2.5 x_e^2) / \Delta_e \\ \Delta_e &= x_e^4 + p_{10} x_e^2 + p_0^2\end{aligned}$$

$$\text{gdzie: } \eta_0 = m_e / (e n_e \tau_{ei}); \quad \beta_0 = k / e; \quad \chi_0 = k^2 T_e n_e \tau_{ei} / m_e$$

$$\begin{aligned}p_0 &= 0.31 + 1.2Z^{-1} + 0.41Z^{-2}; \quad p_1 = 0.22 + 0.72Z^{-1}; \quad p_2 = 4.6 + 1.8Z^{-1} \\ p_3 &= 0.095 + 0.31Z^{-1} + 0.37Z^{-2}; \quad p_4 = 0.47 + 0.91Z^{-1}; \quad p_5 = 3.8 + 1.3Z^{-1} \\ p_6 &= 0.88 + 1.45Z^{-1} + 0.73Z^{-2}; \quad p_7 = 3.9 + 2.3Z^{-1}; \quad p_8 = 3.2 + 1.4Z^{-1} \\ p_9 &= 10.2 + 9.1Z^{-1} + 2.3Z^{-2}; \quad p_{10} = 7.5 + 6.0Z^{-1} + 1.2Z^{-2}\end{aligned}$$

(4.35)

Współczynniki przewodnictwa dla jonów są następujące :

$$\begin{aligned}\chi_{\parallel}^i &= 7.81 \chi_0^i; \quad \chi_{\perp}^i = \chi_0^i (0.33 + x_i^2) / \Delta_i; \quad \chi_{\lambda}^i = -2.5 \chi_0^i x_i (0.46 + x_i^2) / \Delta_i \\ \Delta_i &= x_i^4 + 0.68 x_i^2 + 0.043; \quad \chi_0^i = k^2 n_i T_i \tau_{ii} / m_i\end{aligned}$$

(4.36)

Ogólna postać tensora lepkości w polu magnetycznym jest skomplikowana. Jest ona określona przez 5 skalarnych współczynników. W układzie współrzędnych, w którym oś z jest równoległa do pola magnetycznego tensor lepkości ma składowe :

$$\begin{aligned}\Pi_{xx} &= -\frac{\mu_0}{2} (W_{xx} + W_{yy}) + \frac{\mu_1}{2} (W_{xx} - W_{yy}) + \mu_3 W_{xy} \\ \Pi_{xy} &= \Pi_{yx} = -\mu_1 W_{xy} + \frac{\mu_0}{2} (W_{xx} - W_{yy}) \\ \Pi_{xz} &= \Pi_{zx} = -\mu_2 W_{xz} - \mu_4 W_{yz} \\ \Pi_{yz} &= \Pi_{zy} = -\mu_2 W_{yz} + \mu_4 W_{xz} \\ \Pi_{zz} &= -\mu_0 W_{zz}\end{aligned}$$

(4.37)

Tensor lepkości w ogólnej postaci można zapisać w następujący sposób:

$$\Pi_{ik} = -\mu_0 \Pi_{ik}^0 - \mu_1 \Pi_{ik}^1 - \mu_2 \Pi_{ik}^2 + \mu_3 \Pi_{ik}^3 + \mu_4 \Pi_{ik}^4$$

(4.38)

Składowe tensora  $W_{ik}$  wyznaczone zostały np. w pracy [4]. Postać tensora lepkości jest taka sama dla jonów i dla elektronów. Zależność współczynników lepkości od stopnia zamagnesowania i jonizacji jest następująca:

Dla jonów:

$$\begin{aligned}\mu_0^i &= 1.92 p_i \tau_{ii}; \quad \mu_2^i = p_i \tau_{ii} (0.28 + 0.6 x_i) / \delta_i; \quad \mu_4^i = p_i \tau_{ii} (0.6 + x_i^2) / \delta_i; \\ \mu_1^i &= \mu_2^i [2 x_i]; \quad \mu_3^i = \mu_4^i [2 x_i]; \quad \delta_i = 0.146 + x_i^2 + x_i^4\end{aligned}$$

(4.39)

Dla elektronów:

$$\begin{aligned}\mu_0^e &= p_e \tau_{ei} s_1 / s_0; \quad \mu_2^e = p_e \tau_{ei} (s_1 s_0 + s_2 x_e) / \delta_e \\ \mu_4^e &= -p_e \tau_{ei} (s_3 + x_e^2) / \delta_e; \\ \eta_1^e &= \eta_2^e [2 x_e]; \quad \eta_3^e = \eta_4^e [2 x_e]; \quad \delta_e = s_0^2 + s_4 x_e^2 + x_e^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_0 &= 0.82 + 1.82Z^{-1} + 0.76Z^{-2}; \quad s_1 = 1.46 + 1.04Z^{-1}; \quad s_3 = 3.05 + 3.7Z^{-1} + 1.17Z^{-2} \\
s_4 &= 5.3 + 6.36Z^{-1} + 2.02Z^{-2}
\end{aligned}
\tag{4.40}$$

Należy zwrócić uwagę, że współczynniki  $\mu_3^i$  i  $\mu_4^i$  odpowiadają za efekty związane ze skończonym promieniem Larmoura dla jonów (FLR).

#### 4.2 Współczynniki transportu

W układach typu z-pinch plazma występuje w szerokim zakresie parametrów. W początkowym okresie, gdy prąd jest jeszcze mały, ośrodek jest gazem częściowo zjonizowanym. Nagrzewanie materiału i jego jonizacja prowadzą do powstania plazmy. Współczynniki transportu w plazmie idealnej wyznacza się zakładając rozkład Maxwella dla prędkości cząstek. Dla określenia współczynników transportu w szerokim zakresie parametrów wygodnie jest korzystać z ogólnych formuł.

$$\eta = \frac{m_e}{n_e e^2 \tau_e}; \quad \chi^e = \frac{n_e k^2 T_e \tau_e}{m_e}; \quad \chi^i = \frac{n_e k^2 T_i \tau_i}{m_e}
\tag{4.41}$$

W plazmie częściowo zjonizowanej wkład zderzeń z neutralami jest istotny. Czas zderzeń określony jest formułą Frosta

$$\begin{aligned}
\tau_e^{-1} &= \tau_{ei}^{-1} + \tau_{en}^{-1}; \quad \tau_i^{-1} = \tau_{ii}^{-1} + \tau_{in}^{-1} \\
\tau_{en} &= \frac{2\sqrt{\pi m_e}}{3n_a \sqrt{kT_e} Q_{ea}}; \quad \tau_{in} = \frac{2\sqrt{\pi m_i}}{3n_a \sqrt{kT_i} Q_{ia}}
\end{aligned}
\tag{4.42}$$

Dla plazmy deuterowej przekrój czynny na zderzenia elektronów z neutralnymi atomami był aproksymowany następującą formułą

$$Q_{ea} = 10^{-16} \begin{cases} 12.49 + 21.42 \log T_e - 5.01 (\log T_e)^2 & T_e < 2 \cdot 10^4 \text{ K} \\ 1.310^5 / T_e + 714.2 / \sqrt{T_e} & T_e > 2 \cdot 10^4 \text{ K} \end{cases}
\tag{4.43}$$

Bardziej skomplikowany wzór opisuje przekrój czynny na zderzenia elektronów z neutralnymi dla par metali [37]

$$Q_{ea} = \frac{\pi^3 (\alpha_D / 2r_0 a_B)^2}{A_k^2 + 3B_k k r_0 + 7.5C_k (k r_0)^2 - 3.4D_k (k r_0)^3 + 10.67E_k (k r_0)^4}
\tag{4.44}$$

gdzie  $k = m_e v_{Te} / \hbar$  - liczba falowa elektronu ( $\hbar$  - stała Plancka),

$\alpha_D$  - polaryzowalność dipolowa (dla wolframu 75.),  $a_B$  - promień Bohra,

$r_0 = \sqrt[4]{a_D a_0 / 2Z^{1/3}}$  - promień odcięcia,  $k_D$  - odwrotność długości ekranowania,  $\kappa = k_D r_0$

$$A_k = 1 + 2\kappa + \frac{7}{\pi^2} \kappa^2 + \frac{\pi}{7} \kappa^3, B_k = \exp(-18\kappa), C_k = \frac{1 + 22\kappa - 11.3\kappa^2 + 33\kappa^4}{1 + 6\kappa + 4.7\kappa^2 + 2\kappa^4},$$

$$D_k = \frac{1 + 28\kappa + 13\kappa^2 + 3.2\kappa^3}{1 + 8\kappa + 10\kappa^2 + \kappa^4}, E_k = 1 + 0.1\kappa + 0.3665\kappa^2$$

Współczynniki transportu dla gęstej plazmy i dużym Z (plazmy z metali) w szerokim zakresie temperatur i gęstości wzięte zostały z pracy [38]. Oporność i przewodnictwo cieplne przedstawiane są w ogólnej, wygodnej postaci. Przyjmuje się w nich różne czasy  $\tau_\eta, \tau_\chi$  występujące we wzorach na oporność i przewodność cieplną

$$\eta = \frac{m_e}{n_e e^2 \tau_\eta}; \chi_e = \frac{n_e k^2 T_e \tau_\chi}{m_e}$$

gdzie:

$$\tau_{\eta,\chi} = A_{\eta,\chi} \frac{(1.5kT_e + E_f)^{3/2} \bar{\gamma}_e(Z)}{Z^2 n_i e^4 \ln \Lambda_{ei} S(0)} \left(1 - \frac{B_{\eta,\chi} kT_e}{kT_e + E_f}\right)^{-1} \quad (4.45)$$

$$A_\eta = 0.22; A_\chi = 0.74; B_\eta = 0.6; B_\chi = 0.66$$

$S(0)$  - współczynnik strukturalny dla zerowego przekazu pędu

$$S(0) = \frac{2/3 \cdot 0.04T_i}{2/3 \cdot 0.04T_i + T_{melt}}$$

$T_{melt}$  - temperatura topnienia będąca funkcją gęstości. Przy dużych gęstościach temperatura topnienia rośnie. W pracy [38] podano następujące wyrażenie na  $T_{melt}$

$$T_{melt} = 2800 \frac{\zeta^{2b+3.33}}{(1+\zeta)^4},$$

gdzie  $b = 0.6Z^{1/9}$ ,  $\zeta = \rho / \rho_{ref}$ ,  $\rho_{ref} = A / 9Z_{nuc}$ .

Współczynnik  $\bar{\gamma}_e(Z)$  uwzględnia wpływ zderzeń elektron-elektron

$$\gamma_e(Z) = \frac{3\pi}{32} \left[1 + \frac{153Z^2 + 509Z}{64Z^2 + 345Z + 288}\right]$$

$$\bar{\gamma}_e(Z) = \gamma_e(Z) + \left(1 - \gamma_e(Z) \left[\frac{T_F^2}{T_F^2 + T_e}\right]\right)$$

$T_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n_2)^{2/3}$  - temperatura Fermi. Powyższe formuły dają dobry rezultat dla całkowicie zjonizowanej plazmy w zakresie stosunkowo niskich gęstości np., w początkowej fazie eksplozji przewodnika w jego koronie. Dla gęstej plazmy o umiarkowanych temperaturach, gdzie istotne są efekty degeneracji lepsze wyniki daje model Lee-Mora [39]. Uwzględniono w nim rozpraszanie kulombowskie elektronów na jonach dla rozkładu Fermi. Pominięto rozpraszanie elektronów na elektronach. Uśredniona po rozkładzie Fermiego częstość zderzeń wynosi

$$\tau_{ei} = \frac{3m_e (kT_e)^{3/2}}{2\sqrt{2} Z^2 n_i e^4 \ln \Lambda_{ei}} \left[1 + \exp\left(-\mu/kT_e\right)\right] F_{1/2}\left(\mu/kT_e\right), \quad (4.46)$$



gdzie  $\ln \Lambda_{ei}$  logarytm kulombowski. W plazmie idealnej określony poprzez logarytm maksymalnego i minimalnego parametru zderzenia  $\ln \Lambda_{ei} = \ln \left( \frac{b_{max}}{b_{min}} \right)$  Za  $b_{max}$  przyjmuje się długość Debeya  $r_{De} = \left( \frac{kT_e}{4\pi e^2 n_e} \right)^{1/2}$  a za

$$b_{min} = (\lambda_{Broglie}^2 + \rho_{\perp}^2)^{1/2}$$

gdzie  $\rho_{\perp} = e^2 z / 3kT_e$  -parametr zderzenia:  $\lambda_{Broglie} = \frac{\hbar}{\sqrt{3} m_e k (T_e^2 + T_F^2)^{1/4}}$  długość fali de

Broglie'a elektronu uogólniona na przypadek częściowej degeneracji. W plazmie nieidealnej tak określony logarytm kulombowski może niestety przyjmować wartości ujemne. Aby tego uniknąć korzystając z dokładniejszych przybliżeń trajektorii elektronów przyjmuje się następujące wyrażenie na logarytm kulombowski

$$\ln \Lambda_{ei} = 0.5 \ln \left( 1 + \left( \frac{b_{max}}{b_{min}} \right)^2 \right) \text{ gdzie } b_{max} = \max(r_{de}, r_{ws}) \quad (4.47)$$

Dla niezamagnesowanej plazmy w pracy [39] otrzymano ogólne, ale skomplikowane wyrażenia dla współczynników transportu, w które wchodzi funkcje Fermi-Diraca różnego rzędu. Dla przypadku z polem magnetycznym formuły są jeszcze bardziej złożone. Autorzy dla słabego pole magnetycznego załączają aproksymacje od parametru degeneracji  $\zeta = \log \left( 1 + \exp \left( \frac{\mu}{kT} \right) \right)$ . Parametr ten zmienia się od 0 (plazma idealna) do  $\infty$  dla plazmy całkowicie zdegenerowanej. Niestety aproksymacja daje znacznie większe różnice dla plazmy idealnej w porównaniu do rezultatów Braginskiego niż twierdzą autorzy. W kodzie użyłem więc wartości tabelaryzowanych zamieszczonych w pracy., Wartości pośrednie były aproksymowane biliniowo z 4 węzłów tabeli.

W rzadkiej plazmie całkowita oporność może być znacznie większa od oporności kulombowskiej. Dyssypacja energii wywołana jest turbulencją plazmy, generowaną przez różnego rodzaju niestabilności prądowe. Turbulencja prowadzi do powstania fluktuacji pola elektromagnetycznego na których ulegają rozproszeniu cząstki naładowane. Efektem tego jest zwiększenie oporności albo co jest równoważne do zwiększenia częstości zderzeń  $\nu_{eff} = \nu_{cul} + \nu_{anom}$  [40]. Parametrem określającym wzbudzenie określonej niestabilności prądowej jest prędkość prądowa  $v_d = j / en_e r$  Najniższy próg wzbudzenia ma niestabilność dolno-hybrydowa. Anomalna częstość zderzenia dla tej niestabilności wynosi (gdy  $v_d < v_{Ti}$  i  $T_i > T_e$ )

$$\nu_{anom} = \left( \frac{v_d}{v_{Ti}} \right)^2 \sqrt{\omega_{ce} \omega_{ci}} \quad (4.48)$$

Gdy  $v_d > v_{Ti}$  niestabilność ta przechodzi w modyfikowana niestabilność Bunemana z częstością zderzeń równą

$$\nu_{anom} = \left( \frac{v_d}{v_{Ti}} \right)^{-1/3} \sqrt{\omega_{ce} \omega_{ci}}$$

(4.49)

Największy wkład do oporności anomalnej daje niestabilność jonowo- dźwiękowa. Wzbudza się ona w plazmie, w której mamy spełniony warunki  $zT_i > T_i$  i  $v_d > v_{cric}$

$$v_{anom} = 10^{-2} \frac{T_e v_d}{T_i v_s} \omega_{pi} \quad (4.50)$$

gdzie  $v_{cric} = v_s(1+z) \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \exp\left(-1.5 - \frac{zT_e}{T_i}\right)$ .

W modelach numerycznych dla prawidłowego opisu fal uderzeniowych wprowadza się sztuczną lepkość numeryczną [41], [42] lub zadaje się nieciągłość na granicy komórki i wykorzystuje rozwiązanie Riemanna dla wyznaczenia strumieni (metoda Godunowa) [43]. W podejściu ze sztuczną lepkością dodaje się do równania ruchu dodatkowy człon zwiększający skalarne ciśnienie w obszarach, gdzie występują fale uderzeniowe. Ten dodatkowy wyraz dobrany został w ten sposób, aby nowy układ spełniał warunki na froncie fali uderzeniowej i aby w obszarach poza frontem fali był do zaniebdania. Jego zadaniem jest poszerzenie szerokości frontu fali do rozmiaru komórki siatki numerycznej. Jeśli przyjmiemy, że  $\rho$  to gęstość w środku komórki a  $\Delta v$  to skok prędkości wówczas ten nieliniowy człon  $q_{nl}$  ma postać

$$q_{nl} = c_2 \rho (\Delta v)^2$$

$c_2$ -stała rzędu 1. Człon  $q_{nl}$  będzie prowadził do dyssypacji energii jeśli przyjmie się, że będzie on różny od zera tylko w przypadku kompresji. Przekształca on energię kinetyczną w wewnętrzną, a więc działa podobnie jak lepkość. Dołączenie tego członu zabezpiecza przed inwersją komórki (zamianą węzłów siatki), ale nie eliminuje нефizycznych oscylacji za frontem fali uderzeniowej. Aby uniknąć tych oscylacji dodaje się jeszcze człon sztucznej liniowej lepkości  $q_{lin}$ , który zanika wolniej za frontem fali uderzeniowej.

$$q_{lin} = c_1 \rho c_s |\Delta v|,$$

gdzie  $c_s$  - prędkość dźwięku,  $c_1$  - stałą rzędu 1

Całkowita sztuczna lepkość może być przedstawiona w formie zaproponowanej po raz pierwszy przez Kuropatnke [44]

$$q = \rho \left\{ c_2 \frac{(\gamma+1)}{4} |\Delta v| + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 (\Delta v)^2 + c_1^2 c_s^2} \right\} |\Delta v|. \quad (4.51)$$

Skok prędkości  $\Delta v$  przyjmuje się następującej formie  $\Delta v = l_z \nabla \cdot \vec{v}$  gdzie  $l_z$  - efektywna długość.

Uogólnienie sztucznej lepkości na większą ilość wymiarów powinno spełniać parę warunków. Sztuczna lepkość musi prowadzić do zmniejszania energii kinetycznej (warunek dyssypatywności), musi ona znikać dla stałego pola prędkości, znikać dla jednorodnej kompresji i sztywnej rotacji oraz nie powinna wywoływać efektów wzdłuż frontu fali uderzeniowej. Aby spełnić te wszystkie warunki sztuczna lepkość w tym przypadku przyjmowana jest jako wielkość tensorowa. W pracy [45] zaproponowano dodanie sztucznej lepkości  $\mu_{art}$  do lepkości fizycznej  $\mu_p$ . Sztuczna pseudolepkość  $\mu_{art}$  ma postać

$$\mu_{art} = \begin{cases} \rho \left\{ c_2 \frac{(\gamma + 1)}{4} |l_z \nabla \cdot \vec{v}| + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4}\right)^2 (l_z \nabla \cdot \vec{v})^2 + c_1^2 c_s^2} \right\} \nabla \cdot \vec{v} < 0 \\ 0 & \nabla \cdot \vec{v} > 0 \end{cases} \quad (4.52)$$

Dla plazmy z polem magnetycznym (MHD) przyjąłem wykładnik adiabaty we wzorze na sztuczna lepkość  $\gamma=2$ , co odpowiada zmianie ciśnienia wzmrożonego pola magnetycznego

Taką wygodną postać pseudolepkości zastosowałem w modelu numerycznym. Uwzględniana jest ona tylko w niezależnej od pola magnetycznego części tensora lepkości.

### 4.3 Równania stanu

Równania stanu podają zależność ciśnienia i energii wewnętrznej składników plazmy (elektronów i jonów) w warunkach równowagi termodynamicznej od parametrów plazmy -temperatury i gęstości  $T_e$ ,  $T_i$ ,  $n_e$ ,  $n_i$ . Równania stanu wyznacza się eksperymentalnie albo korzystając z metod mechaniki statystycznej. Równanie stanu dla plazmy idealnej ma standardową postać:

$$p_i = n_i k T_i; \quad p_e = n_e k T_e = Z n_i k T_e \quad E_{e,i} = \frac{3}{2} p_{e,i} \quad (4.53)$$

Model plazmy idealnej używany jest w kodzie dla symulacji dynamiki plazmy w układzie Plasma Focus, gdzie gęstości nie są duże.

Dla plazmy powstałej z eksplozji metalowego drucika konieczne uwzględnienie dodatkowo tzw. "chłodnej" składowej, zależnej tylko do gęstości, za którą odpowiadają oddziaływania atom-atom. Ciśnienie to przy rozrywaniu próbki, gdy gęstość spada poniżej gęstości normalnej  $\rho_0$  jest wielkością ujemną i bardzo silnie rośnie ze wzrostem gęstości powyżej  $\rho_0$ .

Tak więc utrudnia ono rozrywanie i kompresję metali. Jego wartości określane są w sposób półempiryczny. Dane dla molibdenu, dla którego przeprowadzane były symulacje zaczerpnąłem z pracy [46]. Ciśnienie przedstawione jest w tzw. formie Vineta:

$$p_{cold}(\rho) = 3K_0 \left(1 - X^{\frac{1}{3}}\right) / X^{\frac{2}{3}} \exp \left[ \eta(1 - X^{1/3}) + \beta(1 - X^{1/3})^2 + \gamma(1 - X^{1/3})^3 + \delta(1 - X^{1/3})^4 \right] \quad (4.54)$$

gdzie  $X = \rho_0 / \rho$ ,  $K_0 = 264.8710^{10} \text{ dyn/cm}^2$ ,  $\eta = 4.7127$ ,  $\beta = -8.1729$ ,  $\gamma = 34883.532$ ,  $\delta = -186.67$

Niestety ta zależność daje dobre wyniki tylko dla  $\rho < 3 \rho_0$ , potem dość szybko spada do zera Dla dużych kompresji korzystałem dla określenie chłodnego ciśnienia z pracy [47], przedstawionego w następującej postaci

$$p_{cold}(\rho) = 10^{10} \sum_{i=1}^{i=6} a_i \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(i-1)/2} \quad (4.55)$$

gdzie  $a_1 = 11964$ ,  $a_2 = 56388.8$ ,  $a_3 = -107049$ ,  $a_4 = 103649$ ,  $a_5 = 52730$ ,  $a_6 = 11694$

Formuła (4.55) daje z kolei nieprawidłowe wartości dla gęstości  $\rho < \rho_0$  (ujemne ciśnienia)

Jeżeli przyjąć, że swobodne elektrony nie oddziałują silnie z jonami to można je traktować jak gaz podlegający statystyce Fermi Diraca.

Parametry rozkładu Fermi Diraca określone są przez potencjał chemiczny określony zależnością:

$$n_e = \frac{8\pi}{h^3} (2m_e k T_e)^{3/2} F_{1/2}(\eta) \quad (4.56)$$

gdzie  $\eta = \frac{\mu}{k T_e}$  zredukowany potencjał chemiczny a  $F_n(\eta) = \int_0^\infty \frac{x^n dx}{1 + \exp(x - \eta)}$  - całka Fermi-Diraca rzędu  $n$ .

Ciśnienie i energia wewnętrzna wyrażają się w następujący sposób:

$$p_e = \frac{8\pi}{3h^3} (2m_e k T_e)^{3/2} k T_e F_{3/2}(\eta); \quad E_e = \frac{3}{2} \frac{p_e}{n_i} \quad (4.57)$$

Znając ciśnienie możemy wyznaczyć z zależności termodynamicznych ciepło właściwe

$$c_{ve} = \frac{\partial E_e}{\partial T_e}, \quad \text{prędkość dźwięku } c_s = \sqrt{\left( \frac{\partial p_e}{\partial \rho} \right)}, \quad \text{ściśliwość } B_e = \frac{3}{2} \left( p_e - \rho \frac{\partial p_e}{\partial \rho} \right)$$

Przy różniczkowaniu funkcji Fermi Diraca korzysta się z zależności:

$$\frac{dF_n(x)}{dx} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)} F_{n-1}$$

Dla plazmy idealnej, gdy potencjał chemiczny  $\eta \rightarrow -\infty$  formuły przechodzą w klasyczny opis oparty na rozkładzie Maxwella. Główna trudność z włączeniem tego opisu do kodu numerycznego związana była ze znalezieniem efektywnych aproksymacji funkcji Fermi-Diraca. Dla określenia potencjału chemicznego korzystam z odwrotnej funkcji  $F_{1/2}^{-1}$ . W kodzie była ona aproksymowana w następujący sposób [48]

$$F_{1/2}^{-1}(z) = \begin{cases} \ln \left( \frac{3}{3\sqrt{\pi}} y^2 \frac{1 + a_1 y^2 + a_2 y^4 + a_3 y^6 + a_4 y^8 + a_5 y^{10}}{1 + b_1 y^2} \right) & 0 \leq y < 3.2 \\ \left( \frac{\alpha_1 + \alpha_2 y^{\frac{8}{3}} + \alpha_3 y^{\frac{16}{3}} + \alpha_4 y^{\frac{24}{3}} + y^{\frac{32}{3}}}{\beta_1 + \beta_2 y^{\frac{8}{3}} + y^{\frac{16}{3}}} \right)^{\frac{1}{4}} & 3.02 \leq y < \infty \end{cases} \quad (4.58)$$

gdzie  $y = \sqrt{1.5z}$

Dla wyznaczenia ciśnienia konieczna jest funkcji  $F_{3/2}(\eta)$ , a dla wyznaczenia ciepła właściwego elektronów funkcja  $F_{-1/2}(\eta)$ . Aproksymację tych funkcji dla szerokiego zakresu degeneracji zaczerpnąłem z pracy [42]. Ma ona następującą postać:

$$F_j(x) = \Gamma(j + 1) \exp\left(\sum_{i=1}^m a_i x^i\right) \quad (4.59)$$

Dostateczną dokładność (2%) daje przyjęcie  $m=8$ .

Dla  $j=-1/2$  współczynniki mają wartość

$$a_0 = -0.522, a_1 = 0.621, a_3 = -0.084, a_4 = -0.0016, a_5 = 1.7810^{-5}, \\ a_6 = -1.17710^{-5}, a_7 = -7.70810^{-8}, a_8 = 4.63410^{-8}$$

dla  $j=1/2$

$$a_0 = -0.2767, a_1 = 0.7986, a_3 = -0.00388, a_4 = 2.91 \cdot 10^{-4}, a_5 = 4.256 \cdot 10^{-5}, \\ a_6 = -8.325 \cdot 10^{-7}, a_7 = -1.773 \cdot 10^{-7}, a_8 = 1.373 \cdot 10^{-9}$$

dla  $j=3/2$

$$a_0 = -0.144, a_1 = 0.87190, a_3 = -0.0392, a_4 = 2.79 \cdot 10^{-4}, a_5 = 3.4275 \cdot 10^{-5}, \\ a_6 = -2.175 \cdot 10^{-6}, a_7 = -1.416 \cdot 10^{-7}, a_8 = 7.6117 \cdot 10^{-9}$$

Te aproksymacje tracą sens dla dużej degeneracji. W tym przypadku przyjmuję wartości asymptotyczne  $F_{-1/2}(z) = \frac{2z^{1/2}}{\sqrt{\pi}}$ ;  $F_{1/2}(z) = \frac{4z^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}$ ;

Przy uwzględnieniu w wyrażeniu dla energii swobodnej członów dających obniżenie potencjału jonizacji w gęstej plazmie tożsamości termodynamicznej  $p = \varrho^2 \frac{\partial F}{\partial \varrho}$  można otrzymać poprawkę na ciśnienie.

Dla modelu zaproponowanego w [49], [50], [51] poprawki te sprowadzają się do zastąpienia gęstości elektronów i jonów w określeniu potencjału chemicznego oraz ciśnienia jonowego przez zmodyfikowane wielkości:

$$n_i^{mod} = \frac{1}{\frac{m_i}{\varrho} - v}; n_e^{mod} = z n_i^{mod} \quad (4.60)$$

Ciśnienie jonowe określone jest formułą  $p_i = n_i^{mod} k T_i$  a sens wielkości  $v$  podany będzie w następnym rozdziale przy omawianiu modelu jonizacji. Przy określaniu współczynników transportu korzystam z niezmiennych wartości gęstości jonów i elektronów.

#### 4.4 Równania MHD dla układu z-pinch

Charakterystyczną cechą większości układów typu z-pinch jest osiowa symetria zjawiska. Symetrię tę mogą zaburzać włókna prądowe - filamenty obserwowane w niektórych wyładowaniach na układzie Plasma Focus. Przyjęcie symetrii osiowej oznacza, że  $\partial/\partial\varphi = 0$  w cylindrycznym układzie współrzędnych  $(r, \varphi, z)$ . Przy założeniu takiej symetrii mamy tylko jedną składową pola magnetycznego  $\vec{B} = [0, B_\varphi(r, z), 0]$  i dwie składowe prądu  $\vec{j} = [j_r(r, z), 0, j_z(r, z)]$ . Jeśli przyjmiemy, że  $v_\varphi = 0$  w chwili początkowej to ze względu na symetrię nie zmienia się ona w czasie trwania zjawiska i prędkość ma

tylko dwie składowe  $\vec{v} = [v_r(r, z), 0, v_z(r, z)]$ . Dla przyjętej symetrii układ równań MHD w zmiennych Lagrange'a, dla całkowicie zjonizowanej plazmy wodorowej ma postać:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (4.61)$$

$$\rho \frac{dv_r}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{B_\varphi}{4\pi r} \frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial \Pi_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial \Pi_{rz}}{\partial z} - \frac{\Pi_{rr} - \Pi_{\varphi\varphi}}{r} \quad (4.62)$$

$$\rho \frac{dv_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{B_\varphi}{4\pi} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_{rz}}{\partial r} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \rho c_{vi} \frac{dT_i}{dt} = & -p_i \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \chi_\perp^i \frac{\partial T_i}{\partial r} - r \chi_\parallel^i \frac{\partial T_i}{\partial z} \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left( \chi_\perp^i \frac{\partial T_i}{\partial z} + \chi_\parallel^i \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) + \mu_1^i \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \mu_1^i \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 + 0.5 \mu_0^i \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2v_r}{r} \right)^2 + \\ & \frac{2m_e n_i (T_e - T_i)}{\tau_{ei} m_i} \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} \rho c_{ve} \left( \frac{dT_e}{dt} - \frac{c}{4\pi n_e e} \left( -\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \frac{\partial T_e}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r} \frac{\partial T_e}{\partial z} \right) \right) \\ = -p_e \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{c}{4\pi e n_e^2} \left( -\frac{\partial n_e}{\partial r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial n_e}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r} \right) \right) \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \chi_\perp^e \frac{\partial T_e}{\partial r} + r \chi_\parallel^e \frac{\partial T_e}{\partial z} + r \frac{c T_e}{4\pi e} \left( -\beta_\perp \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} + \beta_\parallel \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r} \right) \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( \chi_\perp^e \frac{\partial T_e}{\partial z} - \chi_\parallel^e \frac{\partial T_e}{\partial r} + \frac{c T_e}{4\pi e} \left( \beta_\perp \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r} + \beta_\parallel \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right) \right) + \\ + \eta_\perp \left( \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{c}{4\pi} \frac{\partial T_e}{\partial r} \left( -\beta_\perp \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} + \beta_\parallel \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r} \right) + \\ \frac{c}{4\pi} \frac{\partial T_e}{\partial z} \left( \beta_\perp \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r} + \beta_\parallel \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right) + \\ + \mu_1^e \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \mu_1^e \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 + 0.5 \mu_0^e \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2v_r}{r} \right)^2 + \\ + \frac{2m_e n_i (T_i - T_e)}{\tau_{ei} m_i} \end{aligned}$$

(4.65)

gdzie składowe tensora lepkości mają postać:

$$\begin{aligned}\Pi_{rr} &= \mu_o \frac{1}{3} \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} - 2 \frac{u_r}{r} \right) + \mu_1 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \mu_3 \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ \Pi_{zz} &= \mu_o \frac{1}{3} \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} - 2 \frac{u_r}{r} \right) - \mu_1 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \mu_3 \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ \Pi_{rz} &= -\mu_1 \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \mu_3 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \\ \Pi_{\varphi\varphi} &= -\mu_o \frac{2}{3} \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} - 2 \frac{u_r}{r} \right)\end{aligned}$$

(4.66)

Równanie opisujące ewolucję a pola magnetycznego (dyfuzję) można przekształcić do wygodnej postaci w zmiennych Lagrange'a wykorzystując równanie ciągłości. Ma ono następującą postać:

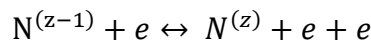
$$\begin{aligned}\rho r \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B_\varphi}{\rho r} \right) &= \frac{c^2}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\eta_\perp}{r} \frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial r} - \eta_\parallel \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta_\perp \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} + \frac{\eta_\parallel}{r} \frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial r} \right) \right\} + \\ &+ \frac{c}{4\pi n_e} \left( \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \frac{\partial \ln n_e}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial \ln n_e}{\partial z} \frac{\partial (B_\varphi)}{\partial r} \right) + \\ &+ \frac{c}{e} \left\{ \frac{\partial T_e}{\partial r} \left( \frac{\partial \beta_\perp}{\partial z} + \frac{\partial \beta_\parallel}{\partial r} \right) + \frac{\partial T_e}{\partial z} \left( -\frac{\partial \beta_\perp}{\partial r} + \frac{\partial \beta_\parallel}{\partial z} \right) + \beta_\parallel \left( \frac{\partial^2 T_e}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T_e}{\partial z^2} \right) \right\} + \\ &+ \frac{c}{e} \left( \frac{\partial \ln n_e}{\partial r} \frac{\partial T_e}{\partial z} - \frac{\partial \ln n_e}{\partial z} \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) \\ &+ \frac{c}{e} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{n_e} \left( \frac{\partial \Pi_{rr}^e}{\partial r} + \frac{\partial \Pi_{rz}^e}{\partial z} + \frac{\Pi_{rr}^e - \Pi_{\varphi\varphi}^e}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{n_e} \left( \frac{\partial \Pi_{zz}^e}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_{rz}^e}{\partial r} \right) \right) \right) \right\}\end{aligned}$$

(4.67)

#### 4.5 Równania MHD z uwzględnieniem jonizacji.

Procesy atomowe w plazmie są silnie sprzężone z procesami hydrodynamicznymi, chociaż różnią się skalami czasowymi. Szybkości jonizacji i rekombinacji plazmy zależy od jej temperatury elektronowej i gęstości. Z kolei jonizacja zmienia ilość elektronów i skład jonowy plazmy (Z) co istotnie wpływa na dynamikę i procesy transportu. Oprócz zmiany ilości cząstek zmienia się też bilans energetyczny. Konieczne jest uwzględnienie wpływu jonizacji w równaniu dla temperatury elektronowej. W większości kodów modelujących dynamikę plazmy stosuje się przybliżenie równowagowe dla określenia stopnia jonizacji. W przypadku dynamicznych procesów nie jest osiągany stan równowagowy dla jonizacji.

Wyróżniamy dwa główne mechanizmy wzbudzenia i jonizacji w plazmie - zderzeniowe i radiacyjne. Procesy odwrotne - deekscytacja i rekombinacja mają podobny charakter. Proces jonizacji-rekombinacji można przedstawić w postaci



$$N^{(z-1)} + h\nu \leftrightarrow N^{(z)} + e \quad (4.68)$$

Uwzględnia się tylko zderzenia jonów z elektronami, ponieważ są bardziej efektywne niż zderzenia między ciężkimi cząstkami. W zastosowaniach w symulacjach komputerowych używa się modelu zderzeniowo radiacyjnego. W modelu tym uwzględnia się wszystkie zderzeniowe procesy jonizacji i rekombinacji oraz proces rekombinacji radiacyjnej. Pomija się w nim w nim proces fotojonizacji. Ze względu na złożoność modelu uwzględnia się tylko procesy ze stanu podstawowego, pomijając przejścia przez stany wzbudzone.

Dla modelu zderzeniowo radiacyjnego równania opisujące szybkość zmian koncentracji poszczególnych stopni jonizacji mają postać [53]

$$\begin{aligned} \frac{dn_{z+1}}{dt} = & n_e n_z S(z, T_e) - n_e n_{z+1} [S(z+1, T_e) + \alpha_r(z+1, T_e) + n_e \alpha_{3b}(z+1, T_e)] + \\ & n_e n_{z+2} [\alpha_r(z+2, T_e) + n_e \alpha_{3b}(z+2, T_e)] \end{aligned} \quad (4.69)$$

gdzie  $S(z, T_e)$  - współczynnik jonizacji zderzeniowej,  $\alpha_r(z, T_e)$  - współczynnik rekombinacji radiacyjnej,  $\alpha_{3b}(z, T_e)$  - współczynnik rekombinacji trójciałowej [54]

Współczynniki te są równe

$$S = \frac{9 \cdot 10^{-6} \zeta_e (kT_e / I_z)^{1/2}}{I_z^{3/2} (4.88 + kT_e / I_z)} \exp(-kT_e / I_z)$$

$$\alpha_r = 5.2 \cdot 10^{-14} (kT_e / I_z)^{1/2} Z [0.429 + 0.5 \log(kT_e / I_z) + 0.489 (kT_e / I_z)^{1/2}]$$

$$\alpha_{3b} = 2.97 \cdot 10^{-27} \zeta_z / kT_e I_z^2 (4.88 + kT_e / I_z)$$

gdzie:  $I_z$  - potencjał jonizacji,  $\zeta_z$  - ilość elektronów na zewnętrznej powłoce dla stopnia jonizacji  $Z$

Równania kinetyki jonizacji są sprzężone z równaniem dla temperatury elektronowej. Ma ono z uwzględnieniem strat na jonizację następującą postać:

$$\frac{3}{2} n_e \frac{dT_e}{dt} = - \left( \sum_{k=1}^{k=Z} I_k \frac{dn_k}{dt} + \frac{3}{2} kT_e \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{k=Z} i \frac{dn_k}{dt} \right) + \dots \quad (4.70)$$

Rozwiązanie numeryczne tych sprzężonych silnie równań jest kłopotliwe i zajmuje sporo czasu obliczeniowego. Dla potrzeb modelowania dynamiki plazmy wystarczająca jest znajomość średniego stopnia jonizacji  $Z = \sum_{k=1}^{k=Z_N} k \cdot n_k / \sum_{k=1}^{k=Z_N} n_k$ . Z dostateczną dokładnością zmianę średniego stopnia jonizacji  $Z$  opisuje uśrednione równanie [55] :

$$\frac{dZ}{dt} = Z(v_{ion} - v_r - v_{3b}) \quad (4.71)$$



$$v_{ion} = 10^{-7} n_i \left[ \frac{I_H}{I(Z)} \right]^{3/2} \exp \left[ -\frac{I(Z)}{kT_e} \right] \left[ \frac{I(Z)}{kT_e} \right]^{1/2} \left[ 1 + \frac{I(Z)}{kT_e} \right]^{-1} - \text{szybkość jonizacji}$$

$$v_r = 6 \cdot \lambda 10^{-14} n_i \left[ \frac{I(Z)}{I_H} \right]^{1/2} \left[ \frac{I(Z)}{kT_e} \right]^{3/2} \left[ 1 + \frac{I(Z)}{kT_e} \right]^{-1}, \text{ szybkość rekombinacji radiacyjnej,}$$

gdzie  $\lambda = 1 \div 5$ -

$$v_{3b} = 3.3 \cdot 10^{-31} Z n_i^2 \left[ \frac{I_H}{I(Z)} \right]^{3/2} \left[ \frac{I_H}{kT_e} \right]^{3/2} \left[ \frac{I(Z)}{kT_e} \right]^{1/2} \left[ 1 + \frac{I(Z)}{kT_e} \right]^{-1} - \text{szybkość rekombinacji trójcząłowej}$$

$I_H$  - potencjał jonizacji wodoru (13.6 eV),  $I(Z)$  - funkcja aproksymująca potencjały jonizacji np. w postaci  $I(z) = I_0 + I_1 \frac{z^2}{(Z_N + \frac{2}{3} - z)^{2/3}}$  gdzie  $I_0 = \frac{3}{1 - 0.96 / (Z_N + 1)^{0.257}}$ ,  $I_1 = 10.4$  eV

Gdy znane są potencjały jonizacji za funkcję  $I(z)$  można przyjąć aproksymacje odcinkami liniową.

W gęstej plazmie fluktuujące lokalne mikropola cząstek wpływają na obniżenie potencjału jonizacji. Jest to związane z nieidealnością plazmy. W bardzo gęstej plazmie, gdy średnie odległości między cząstkami stają się porównywalne z rozmiarami atomu  $r_a \sim n_i^{-1/3}$  możliwa jest spontaniczna jonizacja atomów tzw. jonizacja ciśnieniem.

W pierwszych wersjach kodu użyto formułę na obniżenie potencjału jonizacji z pracy [56]

$$\Delta I_k = - \frac{2e^2(z \cdot Z/R^2)^{1/2}}{(0.027(Z/Z_h)^4 + 0.27(Z^4 Z_s Z/Z_h^5) \Gamma + 0.18(zZ\Gamma)^2)^{1/8}} \quad (4.72)$$

gdzie:

$$Z_h^{3/2} = \sum_{k=1}^{k=Z_N} k^{3/2} \cdot n_k / \sum_{k=1}^{k=Z_N} n_k; \quad Z_s^2 = \sum_{k=1}^{k=Z_N} k^2 \cdot n_k / \sum_{k=1}^{k=Z_N} n_k$$

$R = \left( \frac{3}{4\pi n_i} \right)^{1/3}$  - średnia odległość między cząstkami,  $\Gamma = \frac{(ze)^2}{RkT}$  nieidealność składowej jonowej plazmy (stosunek energii kulombowskiej oddziaływań jonów do energii termicznej).

Ta formuła nie zapewnia niestety pełnej zgodności termodynamicznej. Kalitkin w pracy [52] zaproponował nowe podejście oparte na minimalizacji energii swobodnej. W najnowszej wersji kodu wykorzystano zaproponowane tam formuły na obniżenie potencjału jonizacji i poprawki na ciśnienie i energię wewnętrzną elektronów:

$$\Delta I_k = - \left( \frac{6e^2 \sqrt{Z_h}}{5 \cdot R} \cdot \frac{5}{5 + 9\Gamma} - T_e \frac{10}{15 + 27\Gamma} \cdot \frac{1}{Z_h^{3/2}} \cdot \frac{2x^3 \exp(-x^2)}{\sqrt{2/\pi} \cdot \operatorname{erf}(x) - x \cdot \exp(x)} \right) \cdot \left( (k^{3/2} - (k-1)^{3/2} + 1) \right) \quad (4.73)$$

$$\text{gdzie: } x = \frac{4e^4}{R^2} \sqrt{\frac{18}{5+9\Gamma}}$$

Przyjmując  $\Delta I_k$  za dodatkowy człon w wyrażeniu na energię swobodną, korzystając ze znanych zależności znajduje się poprawki dla ciśnienia elektronowego i energii wewnętrznej.

Nowe problemy pojawiają się w obszarze bardzo dużych gęstości, gdy plazma staje się częściowo zdegenerowaną. Dla plazmy częściowo zdegenerowanej w pracy [57] przedstawiono przybliżony model równowagi jonizacyjnej. Wykorzystując wyniki tej pracy zmodyfikowano używany w modelu jonizacji współczynnik rekombinacji trójciałowej:

$$v_{3v} = v_{3b} \frac{\exp\left(F_{1/2}^{-1}(n_e \lambda_{\text{Broglie}}^3)\right)}{n_e \lambda_{\text{Broglie}}^3}$$

gdzie:  $\lambda_{\text{Broglie}} = \frac{\hbar^2}{3.m_e k \sqrt{T_e^2 + T_F^2}}$ .

W ostatnich pracach [52] zaproponowano dalsze poprawienie modelu równowagi jonizacyjnej dla gęstej plazmie, powyżej gęstości ciała stałego poprzez uwzględnienie skończonych rozmiarów jonów. Przyjmuje się, że objętość k-tego jonu jest objętością kuli  $v_k = 4/3\pi r_k^3$  ( $v_z = 0$ ) o promieniu  $r_k = k + 1/\varphi_{k+1}$  gdzie  $\varphi_k$  k-ty potencjał jonizacji. Średnią objętość jonu  $v$  w komórce znajduje się uśredniając po rozkładzie jonów w następujący sposób:

$$v = \frac{\left(1 - \frac{Z}{Z_N}\right) V \sum_k n_k v_k}{\left(1 - \frac{Z}{Z_N}\right) V + \sum_k n_k v_k} \quad (4.74)$$

Na podstawie określonej dla tego modelu energii swobodnej obniżenie potencjału jonizacji można wyrazić w następującej postaci:

$$\Delta I_k = -P(v_k - v_{k-1}) \quad (4.75)$$

Model ten wymaga dokładnego określenie potencjałów jonizacji, tak aby uniknąć ujemnej różnicy ( $v_k - v_{k-1}$ )

Dla przyjętego przybliżenia człon na straty jonizacyjne w równaniu dla temperatury elektronowej ma teraz postać:

$$\rho c_{ve} \frac{dT_e}{dt} = \dots (\rho c_{ve} T_e + I_z) \frac{dz}{dt} \quad (4.76)$$

Równanie kinetyki jonizacji i równanie dla temperatury są równaniami silnie sprzężonymi ze sobą (tzw. układy sztywne). Wymagają stosowania specjalnych metod przy rozwiązywaniu numerycznym.

#### 4.6 Warunki brzegowe

Dla zamknięcia problemu konieczne jest przyjęcie warunków początkowych i brzegowych. W modelowaniu układów z-pinch warunki brzegowe odgrywają istotną rolę. W opisie Lagrange'a warunki brzegowe możemy podzielić na dwie grupy: warunki na swobodnej powierzchni i warunki na elektrodach (ściankach).

Dla większości eksperymentów z układami typu z-pinch możemy traktować zewnętrzny słabo zjonizowany gaz, o bardzo niskiej gęstości otaczający kolumnę (warstwę) plazmową jako próżnię. Oczywistym jest założenie zerowych normalnych składowych strumieni pędu i ciepła przez powierzchnię swobodną:

$$\vec{n} \cdot \vec{q}_e = 0; \quad \vec{n} \cdot \vec{q}_i = 0; \quad n_k \cdot (p \cdot \delta_{ik} - \Pi_{ik}) = \quad (4.77)$$

$\vec{n} = [n_r, 0, n_z]$  - wektor normalny (założona symetria osiowa)

Dla strumienia ciepła elektronów warunek ten ma postać

$$\begin{aligned} & n_r \left( -\chi_{\perp}^e \frac{\partial T_e}{\partial r} - \chi_{\parallel}^e \frac{\partial T_e}{\partial z} - \frac{T_e c}{e 4\pi} \left( -(2.5 + \beta_{\perp}) \frac{\partial B_{\phi}}{\partial z} + \beta_{\perp} \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_{\phi})}{\partial r} \right) \right) + \\ & + n_z \left( \chi_{\parallel}^e \frac{\partial T_e}{\partial r} - \chi_{\perp}^e \frac{\partial T_e}{\partial z} - \frac{T_e c}{e 4\pi} \left( (2.5 + \beta_{\perp}) \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_{\phi})}{\partial r} + \beta_{\perp} \frac{\partial B_{\phi}}{\partial z} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.78)$$

W strumieniu ciepła uwzględniono entalpię elektronów. Warunek ten łączy pochodne dla temperatury elektronowej i pola magnetycznego na brzegu. Zwykle zakłada się na brzegu dla pola, normalną składową prądu równą się zero  $j_n = n_r \cdot j_r + n_z \cdot j_z = 0$ . W modelu potraktowałem warunek zerowania się normalnego strumienia ciepła elektronów jako wspólny warunek brzegowy dla temperatury elektronowej i pola magnetycznego.

Standardowo przyjmuje się na swobodnym brzegu warunek zerowego ciśnienia. W rozpatrywanych modelach układów typu z-pinch, w opisie Lagrange'a granica między próżnią a kolumną plazmowej jest granicą umowną. W rzeczywistości kolumnę plazmową otacza obszar rzadkiej plazmy, która może istotnie wpływać na dynamikę plazmy. Jednak uwzględnienie zachodzących tam procesów wykracza poza model MHD. Zakładam więc, że na zewnątrz kolumny plazmowej jest próżnia. Aby uniknąć paradoksów związanych z wirowaniem cyklotronowym cząstek w plazmie, zakłada się, że odbijają się one od powierzchni tworząc prąd powierzchniowy. Kompensuje on wewnętrzny moment magnetyczny. Uwzględnienie prądu powierzchniowego równoważne jest warunkowi na skok ciśnienia magnetycznego na brzegu:

$$p = \frac{1}{8\pi} [(B^v)^2 - (B^p)^2]$$

gdzie: za  $B^v$  przyjmuje się wartość pola na brzegu pinchu, w próżni

$$B^v = \frac{I}{5r} \quad (4.79)$$

Warunek zerowania się strumienia pędu plazmy i pola magnetycznego na poruszającej się powierzchni z uwzględnieniem warunku na skok ciśnienia magnetycznego daje dwa równania:

$$-n_r \cdot \Pi_{rr} + n_z \cdot \Pi_{rz} = 0; \quad n_r \cdot \Pi_{rz} - n_z \cdot \Pi_{zz} = 0 \quad (4.80)$$

Po uwzględnieniu zależności składowych tensora lepkości od gradientów prędkości warunki te mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
& n_r \cdot \left[ -\frac{1}{3}\mu_0 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2v_r}{r} \right) + \mu_1 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \mu_3 \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] + \\
& \quad + n_z \cdot \left[ -\mu_1 \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \mu_3 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right] = 0 \\
& n_r \cdot \left[ -\mu_1 \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \mu_3 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right] \\
& \quad + n_z \cdot \left[ -\frac{1}{3}\mu_0 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2v_r}{r} \right) - \mu_1 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \mu_3 \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.81}$$

W modelu traktuję te dwa warunki brzegowe jako warunki dla składowych prędkości. Ciśnienie  $p$  na brzegu przyjmuję jako dane. Warunek na skok ciśnienia służy dla określenia pola magnetycznego na powierzchni plazmy:

$$B^p = \sqrt{(B^v)^2 - 8\pi \cdot p} \tag{4.82}$$

Na brzegach nieruchomych (elektrodach) oczywistym warunkiem jest przyjęcie równej zero normalnej składowej prędkości  $v_n = 0$ . Dopuszczając ruch plazmy wzdłuż ścianek, drugim warunkiem kinematycznym będzie warunek na zerowanie się stycznej składowej tensora lepkości  $\Pi_{rz} = 0$ . - dla płaskich ścianek:

$$-\mu_1 \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \mu_3 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = 0 \tag{4.83}$$

Przyjmujemy, że elektrody są idealnymi przewodnikami. W pierwszym przybliżeniu można przyjąć, że styczny prąd na powierzchni elektrody jest równy zero  $j_\tau = 0$ . Jednak bardziej ogólnym warunkiem będzie przyjęcie zerowego stycznego pola elektrycznego  $E_\tau = 0$ .

Bardziej złożonym problem jest postawienie warunków dla strumieni ciepła na elektrodach. Charakter zjawisk fizycznych na anodzie i katodzie jest różny. Bardziej złożone zjawiska występują na katodzie. W pełnym modelu należałoby uwzględnić również odparowanie materiału elektrod i rozkład ciepła w elektrodach.

Wielkości strumieni ciepła dla elektronów i jonów na katodzie dla niskoprądowego łuku w gazie o wysokim ciśnieniu podano w pracy [58]. Model ten oparty jest o założenie mechanizmu termoemisji elektronów ze zlokalizowanych na powierzchni katody obszarów (spotów). Innym modelem jest model wybuchowej emisji elektronów z lokalnych mikrostrzy na katodzie (ektonów) mający zastosowanie dla wyładowań w próżni

W modelu Benilova [59] zakłada się, że decydującą rolę w określeniu strumienia energii padającej na katodę mają parametry katody i warstwy przy katodowej tj. temperatura katody  $T_{cath}$  i spadek potencjału katodowego  $U_{cath}$ . Założono w modelu, że warstwa przy-katodowa składa się z przylegającej do katody bardzo wąskiej, bezzderzeniowej warstwy rozdzielania ładunku i znacznie szerszej warstwy, gdzie ma miejsce jonizacja wracających do plazmy cząstek neutralnych. W modelu pomija się problem rozmiarów plamki katodowej. Przyjmuje się, że prąd całkowity jest sumą prądu

elektronowego termoemisji  $j_{em}$ , prądu jonowego  $j_i$ , prądu elektronów wtórnych  $j_{se}$  i prądu wstecznych elektronów z plazmy  $j_{ep}$

$$j = j_{em} + j_{se} + j_i - j_{ep} \quad (4.85)$$

Spadek potencjału katodowego  $U_c$  jest sumą spadku w warstwie jonizacyjnej  $U_p$  i w warstwie rozdzielania ładunku  $U_s$ . Napięcie na warstwie jonizacyjnej otrzymuje się po scałowaniu równania równowagi pomiędzy polem elektrycznym i gradientem ciśnienia

$$U_p = \frac{kT_e}{e} \ln \frac{n_{ip}}{n_{is}} \quad (4.86)$$

gdzie:  $n_{ip}$  koncentracja plazmy głównej  $n_{is}$  koncentracja plazmy na granicy warstwy bezzderzeniowej. Koncentrację  $n_s$  na granicy warstwy wyznacza się z bilansu pędu atomów neutralnych i jonów [58] Otrzymuje się następujące wyrażenie na stosunek koncentracji:

$$\frac{n_{ip}}{n_{is}} = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1} \quad (4.87)$$

gdzie:  $a = \sqrt{\frac{1+(1/\mu)}{1+\beta}} (0.9107 + 0.2363\beta)$  ;  $\mu = \frac{K_i}{K_{CX}}$  stosunek szybkości jonizacji do szybkości wymiany ładunkowej:  $\beta = \frac{T_i}{T_e}$

Prąd jonowy określony jest przez warunki na granicy warstwy bezzderzeniowej  $j_i = en_s u_{is}$ , gdzie  $u_{is}$  - prędkość jonowo-dźwiękowa. Na katodzie przyjęto następujące warunki brzegowe dla temperatur:

$$(j_{em} + j_{se}) \frac{2T_x}{e} - j_{ep} \frac{2T_e}{e} = q_{e\perp}$$

$$T_i = T_x$$

oraz warunek ciągłości dla stycznego pola elektrycznego:

$$E_\tau = -\frac{\partial U_c}{\partial \tau} \quad (4.88)$$

Do określenia spadku katodowego i temperatury powierzchni katody  $T_x$  wykorzystujemy bilans energii na katodzie w postaci [58]:

$$(j - j_i)(U_c - \Delta\varphi) + (j_{em} + j_{se}) \frac{2T_x}{e} = \eta \cdot j_i (U_{jon} - (1 - \eta)j_i U_p) + j_{ep} \frac{2T_e}{e} - q_{e\perp} \quad (4.89)$$

gdzie:  $\eta = 1 - \left(1 - \frac{n_{is}^2}{n_{ip}^2}\right)^{-1} - \left(\ln\left(\frac{n_{ip}^2}{n_{is}^2}\right)\right)^{-1}$  współczynnik określający ilość energii przekazanej elektronom w warstwie jonizacyjnej,  $\Delta\varphi = \sqrt{eE_c}$  -obniżenie pracy wyjścia (efekt Schottky). Jest ono istotny przy niskich temperaturach katody. Pole  $E_c$  określone jest następującą formułą:

$$E_c^2 = \sqrt{\frac{8m_e U_s}{e}} (A_i - A_{em}) - A_{ep} \quad (4.90)$$

gdzie:

$$A_i = j_i \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left( \sqrt{1 + \frac{m_e u_{is}^2}{2eU_s}} - \sqrt{\frac{m_e u_{is}^2}{2eU_s}} \right)$$

$$A_{em} = (j_{em} + j_{se}) \left( \sqrt{1 + \frac{T_c}{eU_s}} - \sqrt{\frac{T_c}{eU_s}} \right)$$

$$A_{ep} = 2n_{is}T_e \left( 1 - \exp\left(\frac{eU_s}{T_e}\right) \right)$$

Na katodzie przyjąłem dodatkowe założenie, że potencjał katodowy wyznaczany z równania bilansu energii musi jeszcze spełniać dodatkowo zależność Langmuira:

$$U_c = \frac{T_e}{e} \ln \frac{j_{em} + j_{se} + j_i - j}{v_{Te}}$$

W kolejnych krokach z powyższych związków wyznaczam temperaturę powierzchni katody  $T_c$  i pozostałe wielkości wchodzące do warunku brzegowego. Na katodzie, przy dużych strumieniach ciepła z plazmy prąd może zmienić kierunek. Jest to tzw. reżim anodowy.

Nieco inaczej wygląda sytuacja na anodzie. Elektroda zbiera tylko elektrony - prąd nie może więc na niej zmieniać kierunku. W pracy [60] pokazano, że potencjał anodowy jest zawsze ujemny, i dla jego określenie zaproponowano nieliniowe równania, zależne od  $u_d/v_{Te}$ . W pracy [61] zaprosymowano rozwiązanie tego równania następującym wyrażeniem:

$$U_a = \frac{T_e}{e} \cdot \ln(f(u_d/v_{Te}) \cdot u_d/v_{Te}) \quad (4.91)$$

gdzie:  $f(x) = \min(4, -0.444x^3 + 1.88x^2 - 4.41x + 2.891 + 0.04/x)$

Przybliżenie to jest słuszne dla  $v_d < \left(\frac{8T_e}{\pi m_e}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Strumień ciepła na anodę aproksymowany jest w następujący sposób:

$$q_e = n_e v_d \left( \frac{m_e u_d^2}{2} + g(u_d/v_{Te}) T_e - U_a \right) \quad (4.92)$$

gdzie:  $g(x) = 2. + 0.789x - 0.355x^2$

#### 4.7 Warunki stosowalności przybliżenia MHD

Przy wyprowadzaniu równań magnetohydrodynamiki korzysta się z założenia o lokalnej równowadze termodynamicznej (LTE) Oznacza to, że prędkości cząstek opisywane są lokalnie rozkładami Maxwella. Wymaga to, aby czas zderzeń  $\tau_c \ll \tau_H$ . Za czas  $\tau_H$  przyjmuje się minimalny czas zmian wielkości makroskopowych. W przypadku wyrównanych temperatur elektronów i jonów  $T_e \approx T_i$  elektrony i jony znajdują się w stanie lokalnej równowagi termodynamicznej, gdy  $\tau_i \ll \tau_H$ . Jednakże wymaganie

wyrównanych temperatur zaostza ten warunek  $\tau_i \ll (m_e / m_i)^{1/2} \tau_H$ . Jest to jeden z warunków stosowalności idealnej MHD.

Na skali przestrzennej warunkiem stosowalności przybliżenia MHD jest wymaganie, aby średnie drogi swobodne dla elektronów i jonów były mniejsze od charakterystycznej długości zmian wielkości makroskopowych i większe od średniej odległości między cząstkami  $n^{-1/3} \ll l_c \ll l_H$ .

Pierwsza z nierówności jest spełniona dla plazmy z dużą ilością cząstek w kuli Debye'a  $N\lambda_D^3 \gg 1$ . Gdy plazma staje się bezzderzeniowa narastają gradienty wielkości fizycznych.

Dyfuzyjny strumień ciepła dla elektronów skaluje się następująco  $n_e v_{Te}^2 \tau_e k T_e / l_H$ . Gdy  $\tau_e k T_e / l_H = 1$  strumień ciepła odpowiada granicznemu strumieniowi następująco  $n_e v_{Te}^2$  w którym wszystkie elektrony poruszają się w jednym kierunku z prędkością termiczną  $v_{Te}$ . Ze wzrostem stopnia bezzderzeniowości strumień ciepła może narastać i przekroczyć wartość graniczną. Aby uniknąć nie fizycznych rezultatów ogranicza się strumień ciepła elektronów do wielkości  $q_{max} = f n_e v_{Te}$ , gdzie współczynnik  $f$  przyjmuje wartość z zakresu  $10^{-2} < f < 10^{-1}$ . Najczęściej stosowanym sposobem na ograniczenia strumienia ciepła jest zastąpienie go przez średnią harmoniczną:

$$\frac{1}{q_e^n} = \frac{1}{q_e^s} + \frac{1}{q_{max}} \quad (4.93)$$

W podobny sposób można, poprzez średnią harmoniczną ograniczyć lepkość jonową przyjmując za maksymalny strumień pędu  $0.5 p_i$ . Wprowadzenie maksymalnych dopuszczalnych strumieni wielkości fizycznych prowadzi do ograniczenia współczynników transportu. Ponieważ prędkość plazmy jest określona przez inercję jonów i  $u \ll c$ , stąd można pominąć prąd przesunięcia.

Ważną dla magnetohydrodynamiki relację między prądem a polem elektrycznym daje uogólnione prawo Ohma. Zastępuje ono równanie Poissona. Warunkiem jego stosowalności jest założenie o quasineutralności plazmy  $Z n_i \approx n_e$  i spełnienie silnej nierówności dla mas  $Z m_e \ll m_i$ . Warunki te można wyrazić w następującej postaci:

$$\frac{|\nabla \cdot \vec{E}|}{4\pi e n_e} \sim \frac{\omega \omega_{ce}}{\omega_{pe}^2} \ll 1 \quad (4.94)$$

gdzie:  $\omega \sim 1 / \tau_H$ ,  $\omega_{ce}$  - elektronowa częstość cyklotronowa,  $\omega_{pe}$

Rolę członu związanego z gradientem ciśnienie elektronowego w prawie Ohma można ocenić przyrównując go do siły Lorentza  $1/c \vec{u} \times \vec{B}$ :

$$\frac{c |\nabla p_e|}{e n_e |\vec{u} \times \vec{B}|} \sim \left( \frac{r_{ci}}{l_H} \right) \left( \frac{c_s}{u} \right) \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{1/2} \quad (4.95)$$

gdzie:  $r_{ci}$  jonowy promień cyklotronowy,  $c_s$  prędkość jonowo-dźwiękowa. Dla wyrównanych temperatur  $T_e \approx T_i$  oraz przyjmując, że  $|\vec{u}| \sim c_s$  warunkiem pominięcia  $\nabla p_e$  w prawie Ohma jest nierówność:

$$r_{ci} \ll l_H$$

Porównując wielkości  $1/c \vec{j} \times \vec{B}$  i  $1/c \vec{v} \times \vec{B}$  otrzymamy ocenę roli członu Halla w zależności od parametrów plazmy. Jest on do pominięcia, gdy spełniony jest warunek:

$$\frac{|\vec{j} \times \vec{B}|}{n_e e |\vec{v} \times \vec{B}|} \sim \frac{1}{\beta} \left( \frac{r_{ci}}{l_H} \right) \left( \frac{c_s}{u} \right) \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{1/2} \ll 1 \quad (4.96)$$

gdzie:  $\beta = 4\pi P / B^2$  stosunek ciśnienia plazmy i ciśnienia magnetycznego.

Dla  $\beta \sim 1$  człon Halla można pominąć przy tych samych warunkach co człon z gradientem ciśnienia. Dla małego  $\beta$  warunek jest silniejszy:

$$r_{ci} / l_H \ll \beta \quad (4.97)$$

Rolę przewodności cieplnej można ocenić porównując ją z pracą sił ciśnienia. Przyjmujemy, że współczynnik przewodności  $\chi \sim nT\tau_e / m_e$

$$\frac{|\nabla \cdot (\chi \nabla T)|}{|p \nabla \cdot \vec{u}|} \sim \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \frac{\tau_i}{\tau_H} \beta \quad (4.98)$$

Przewodnictwo cieplne jest do pominięcia dla tego samego warunku, przy którym można przyjąć, że temperatury są wyrównane. Warunkiem pominięcia lepkości w równaniach MHD jest duża liczba Reynoldsa  $R \gg 1$ .

Przyjmując, że współczynnik lepkości  $\mu \sim \rho \tau_i$  warunek ten można przedstawić w postaci:

$$R \sim \frac{\rho u l_H}{\mu} \sim \frac{l_H}{l_c} \frac{u}{c_s} \quad (4.99)$$

Wynika stąd, że w warunkach silnej zderzeniowości plazmy lepkość jest do zaniedbania. Ale nawet w tych warunkach lepkość ma znaczenie w warunku brzegowym.

Stosunek współczynników lepkości dla elektronów i jonów wynosi:

$$\frac{\mu_0^e}{\mu_0^i} = \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{5/2} \frac{Z^3}{(2A)^{1/2}} \quad (4.100)$$

Z formuły 4.100 widać, że dla lekkich pierwiastków (wodoru) lepkość elektronową można pominąć. Dla pierwiastków o dużym  $Z$ , od pewnego stopnia jonizacji dominująca staje się lepkość elektronowa. Kiedy plazma staje się bezzderzeniowa lepkość traci swój fizyczny sens. Dotyczy to przede wszystkim składowej jonowej. Brak zderzeń może prowadzić do pojawienia się grup o różnych nawet przeciwnych prędkościach. W tym przypadku konieczny jest już opis kinetyczny składowej jonowej. Dla składowej elektronowej w warunkach bezzderzeniowości, gdy  $l_e > L$ , w silnym polu magnetycznym, gdy promień cyklotronowy  $r_{ce} \ll L$  można wyprowadzić tensor lepkości dla konfiguracji z-pinchu. [62]. Ma on skomplikowaną postać - zależy od gradientów temperatur, gęstości i pola magnetycznego.

Rolę oporu można ocenić podobnie jak rolę lepkości wprowadzając magnetyczną liczbę Reynoldsa  $R_M = 4\pi |\nabla \times (\vec{u} \times \vec{B})| / c^2 \eta |\nabla^2 \vec{B}| \sim 4\pi u l_H / c^2 \eta$



Warunkiem stosowalności idealnej MHD (przybliżenie nieskończonej przewodności) jest nierówność  $R_M^{-1} \ll 1$ . Można ją przekształcić do postaci:

$$\frac{1}{\beta} \left( \frac{r_{ci}}{l_H} \right)^2 \left( \frac{m_e}{m_i} \right) \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{1/2} \left( \frac{\tau_H}{\tau_i} \right) \ll 1 \quad (4.101)$$

Wykorzystując warunek na wyrównanie temperatur otrzymujemy końcowy warunek:

$$\frac{1}{\beta} \left( \frac{r_{ci}}{l_H} \right)^2 \ll \left( \frac{m_i}{m_e} \right) \left( \frac{\tau_i}{\tau_H} \right) \ll 1 \quad (4.102)$$

Pierwszy warunek (przybliżenie dużej przewodności) to wymaganie dużej skali przestrzennej w stosunku do promienia cyklotronowego. Druga nierówność to wymaganie silnej zderzeniowości.

#### 4.8 Przybliżenie dyfuzyjne dla transportu promieniowania

Nazwą radiacyjna hydrodynamika przyjęto określać dział hydrodynamiki (magneto hydrodynamiki) opisujący poruszający się ośrodek ciągły (ciecz, gaz, plazmę), który absorbuje i emituje promieniowanie elektromagnetyczne. Promieniowanie może w istotny sposób modyfikować dynamikę tego ośrodka. Radiacyjna hydrodynamika służy przede wszystkim do opisu ewolucji plazmy w gwiazdach i w atmosferach niektórych planet. Jej przydatność do modelowania plazmy wytwarzanej w laboratoriach zależy od parametrów plazmy; stosunku rozmiarów do zasięgu promieniowania (grubości optycznej). Radiacyjna hydrodynamika używana jest do symulacji ewolucji plazmy wytwarzanej intensywnymi wiązkami laserowymi lub w impulsowych układach silnoproudowych [63], [64]. Fotony podobnie jak cząsteczki przenoszą energię i pęd w przestrzeni oraz mogą oddziaływać z materią. Promieniowanie w plazmie oddziałuje ze swobodnymi elektronami i związanymi atomami. Podstawowy mechanizmy oddziaływania to rozpraszanie, absorpcja i odwrotny do niej proces emisji promieniowania. Uwzględnienie oddziaływania promieniowania z materią wymaga podejścia kwantowego.

Pole fotonów można opisywać za pomocą intensywności  $I_\nu$ . Intensywność zależy od 7 zmiennych, 3 współrzędnych przestrzennych, 2 kątów, częstości i czasu. Wielkość  $I_\nu/c$  jest gęstością promieniowania na jednostkowy kąt bryłowy i na jednostkę częstości, a  $I_\nu/h\nu$  to ilość kwantów przechodzących przez jednostkową powierzchnię w jednostkowy kąt bryłowy dla jednostkowej gęstości.

Całkowita gęstość energii równa się  $E = \frac{1}{c} \int d\nu \int I_\nu d\Omega$ . Dla intensywności  $I_\nu$  wygodnie jest wprowadzić momenty kątowne. Pierwszy moment  $E_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega$  to spektralna gęstość energii. Całkowanie wykonane jest po pełnym kącie bryłowym  $4\pi$ . Drugi moment to wektor strumienia  $\vec{F}_\nu = \frac{1}{c} \int \vec{n} I_\nu d\Omega$ , gdzie  $\vec{n}$  wektor jednostkowy.

Trzeci moment  $P_\nu = \frac{1}{c} \int \vec{n}\vec{n}I_\nu d\Omega$  przez analogię można uważać za tensor ciśnienia promieniowania o częstotliwości  $\nu$ .

W warunkach pełnej równowagi termodynamicznej promieniowanie emitowane przez ośrodek jest całkowicie pochłaniane. Pole promieniowania jest w tym przypadku jednorodne i niezależne od czasu, a intensywność opisywana jest funkcją Plancka  $B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left( e^{k\nu/kT} - 1 \right)^{-1}$ . Całkowita gęstość energii w równowadze po wycałkowaniu po częstotliwościach wynosi  $E = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty B(\nu, T) d\nu = aT^4$  gdzie  $a = 4k_{SB}/c$ ;  $k_{SB}$  - stała Stefana-Boltzmannna.

Równanie transportu w próżni wyraża fakt zachowania intensywności promieniowania wzdłuż jego kierunku propagacji.

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \vec{n} \cdot \nabla I_\nu = 0 \quad (4.103)$$

Równanie to przypomina równanie Boltzmannna. Brak w nim tylko członów z pochodnymi po pędach, ponieważ na fotony nie działają żadne siły. W ośrodku należy uwzględnić pochłanianie promieniowanie, jego emisje i rozpraszanie. Dla przypadku izotropowego rozpraszania równanie transportu ma postać:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \vec{n} \cdot \nabla I_\nu = j_\nu + \sigma_\nu \cdot J_\nu - (k_\nu + \sigma_\nu) I_\nu \quad (4.104)$$

gdzie  $J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega$  - pierwszy moment uśredniony po kącie,  $j_\nu$  - współczynnik emisyjności opisująca ilość energii dodanej do wiązki promieniowania.

Ze względu na trudności z zamknięciem układu równań zwykle ogranicza się do dwóch równań. Dla uproszczenia zakłada się współczynniki absorpcji i emisji są izotropowe i pomija się rozpraszanie. Po uśrednieniu po częstotliwościach otrzymuje się następujące równania:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F} = \int d\nu (4\pi j_\nu - k_\nu E_\nu) \quad (4.105)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + c \nabla \cdot \vec{P} = - \int d\nu k_\nu \vec{F}_\nu \quad (4.106)$$

Pierwsze równanie 4.105 wyraża zachowanie energii promieniowania, a drugie 4.106 zachowanie jego pędu. Przybliżenie dyfuzyjne jest najważniejszym przybliżeniem w transporcie promieniowania. Traktuje się w nim promieniowanie jako idealny płyn z małymi poprawkami. Jest ono słuszne, gdy średnia droga kwantów promieniowania jest mała w porównaniu z charakterystyczną długością tzn.  $k_\nu L \gg 1$ . Przybliżenie dyfuzyjne tak proste w porównaniu z pełnym równaniem transportu, że stosuje się je również w przypadku, gdy  $k_\nu L < 1$ , gdzie nie daje dokładnych wyników. Pokazano, że rezultaty są

jakościowo poprawne z błędem około 20-30 %, który jest do przyjęcia w większości symulacji. Przybliżenie dyfuzyjne to rozwinięcie równań transportu względem małego parametru - średniej drogi swobodnej promieniowania  $1/k_\nu$ , które obrywane jest na drugim wyrazie. W równaniu transportu pomija się rozpraszanie. Należy pamiętać, że przybliżenie dyfuzyjne nie jest spełnione na brzegu rozważanego obszaru.

Wychodzimy z równania w postaci:

$$I_\nu = \frac{j_\nu}{k_\nu} - \frac{1}{k_\nu} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \vec{n} \cdot \nabla I_\nu \right) \quad (4.107)$$

W pierwszym przybliżeniu przy założeniu stacjonarności i jednorodności rozkładu  $I_\nu$  otrzymujemy warunek lokalnej równowagi promieniowania ze źródłami.  $I_\nu^0 = j_\nu / k_\nu$ . Jeśli źródłem jest ośrodek o temperaturze T to funkcja  $I_\nu^0$  opisująca równowagowe pole promieniowania jest funkcją Plancka  $B_\nu(T)$ . Łańcuch przybliżeń przerwa się w drugim kroku  $I_\nu^1$ . Korzystając z uzyskanego równania można wyznaczyć kolejne momenty kątowe  $E_\nu$ ,  $\vec{F}_\nu$  i  $P_\nu$ .

Z przybliżenia dyfuzyjnego wynika tzw. przybliżenie Eddingtona, w którym tensor ciśnienia promieniowania jest diagonalny i wyraża się następująco  $P_\nu = 1/3 \cdot E_\nu \mathbf{I}$ . Ogólnie współczynnik Eddingtona  $f = P_\nu / E_\nu$  może zmieniać się w zakresie  $0 < f < 1$ . Wartość  $f = 1/3$  odpowiada przybliżeniu dyfuzyjnemu a  $f = 1$  swobodnej emisji

Przybliżenie dyfuzyjne prowadzi do zamkniętego układu równań transportu promieniowania, który można rozwiązywać łącznie z równaniami hydrodynamiki. Przy bardzo ostrych gradientach strumienie radiacyjne mogą być нефизycznie duże Aby tego uniknąć stosuje się specjalną procedurę ograniczającą tzw. flux limiter, tak aby spełniona była nierówność:

$$\frac{c}{3k_\nu} \nabla E_\nu \leq -c \vec{F}_\nu \quad (4.108)$$

Traci się przez to w ogólnym bilansie pędu pęd promieniowania. Ostatecznie otrzymujemy dzięki temu tylko jedno, stosunkowo proste równanie transportu promieniowania typu parabolicznego:

$$\frac{\partial E_\nu}{\partial t} - \nabla \cdot \left( \frac{c}{3k_\nu} \nabla E_\nu \right) = 4\pi j_\nu - k_\nu c E_\nu \quad (4.109)$$

Całkując to równanie po częstościach otrzymujemy, proste i wygodne do stosowania w kodach komputerowych równanie jednogrupowe.

Przez analogie z warunkami pełnej równowagi termodynamicznej definiuje się nową wielkość - temperaturę radiacyjną  $T_R$  :

$$\int_0^\infty d\nu E_\nu = a T_R^4 \quad (4.110)$$

Całkowity strumień promieniowania  $F_R$  równa się wtedy:

$$F_R = -\frac{c}{3} \int_0^\infty \frac{\nabla E_\nu}{k_\nu} d\nu = \frac{cl_R}{3} \nabla a T_R^4 \quad (4.111)$$

gdzie:  $l_R$  - zasięg Rosselanda

Zakłada się, że człon źródłowy występujący w równaniu transportu promieniowania ma postać  $\frac{4\pi}{c} k_\nu B(\nu, T)$  (prawo Kirchoffa) oraz że współczynniki emisji i pochłaniania (nieprzeźroczystości - opacity) są równe. Drugie założenie przypomina założenie o stanie lokalnej równowagi termodynamicznej. Nie jest to jednak do końca słuszne, ponieważ procesy prowadzące do ustalenia się rozkładu Plancka powinny też prowadzić do wyrównania temperatur  $T_e$  i  $T_r$ . Można przekształcić jednogrupowe równanie transportu promieniowania, przyjmując, że temperatury te mogą się różnić, do wygodnej dla symulacji komputerowej postaci równania dla temperatury radiacyjnej:

$$\frac{a}{n_e c} \frac{dT_R^4}{dt} = \frac{a}{n_e} \nabla \cdot \left( \frac{l_R}{3} \nabla T_R^4 \right) + \frac{a}{n_e l_P} (T_e^4 - T_R^4) \quad (4.112)$$

Równanie to sprzężone jest z równaniami magnetohydrodynamiki poprzez równanie dla temperatury elektronowej:

$$c_{ve} \frac{dT_e}{dt} = -\frac{a}{n_e l_P} (T_e^4 - T_R^4) \quad (4.113)$$

Równania te są podstawą tzw. modelu trój-temperaturowego (3T) używanego najczęściej w symulacjach komputerowych. Bardzo ważne jest w tym modelu określenie uśrednionych wartości  $l_R$  i  $l_P$  zasięgów Rosselanda i Plancka:

$$l_R = \frac{\int_0^\infty l(\nu) \frac{\partial B}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B}{\partial T} d\nu} ; l_P = \frac{\int_0^\infty l(\nu) B d\nu}{\int_0^\infty B d\nu} \quad (4.114)$$

Przybliżenie to daje dobre wyniki w obszarze optycznie gęstej plazmy. Dla optycznie gęstej plazmy można stosować prostszy opis transportu promieniowania - przybliżenie dwutemperaturowe z radiacyjną przewodnością. Często używane jest quasi-stacjonarna postać równania dla temperatury radiacyjnej, w której pominięta jest lewa strona równania. Na skali hydrodynamicznej jest to równoważne nielokalnemu transportowi promieniowania.

Taka uproszczona postać równania używana była w początkowych wersjach kodu. Jednak przy wzroście gradientów temperatury radiacyjnych przybliżenie to dawało niefizyczne rezultaty co było powodem podjęciem prac nad niestacjonarnym opisem transportu promieniowania

Model dyfuzyjny dobrze opisuje transport promieniowania w ośrodku optycznie gęstym. Aby móc stosować to przybliżenie również w obszarach o małej optycznej gęstości trzeba ograniczać strumień promieniowania. Najczęściej używanym sposobem

ograniczenia jest model średniej harmoniczej. W tym przypadku strumień  $\vec{F} = c l_R / 3 \nabla T_R^4$  zastępowany jest strumieniem  $\vec{F} = \frac{c l_R}{3 + l_R \left| \frac{\nabla T_R^4}{T_R^4} \right|} \nabla T_R^4$ . Niestety ograniczenie

strumienia powoduje, że równanie staje się nieliniowe. Stosowane są też inne sposoby ograniczenia strumienia dające lepszą zgodność asymptotyczną. W kodzie przyjęto ograniczenie strumienia  $\lambda(R)$  zaproponowane w pracy [65]:

$$\vec{F} = \frac{c l_R \lambda(r)}{\omega} \nabla T_R^4 = \frac{c l_R}{\omega} \left( \coth R - \frac{1}{R} \right) \frac{1}{R} \nabla T_R^4 \quad (4.115)$$

gdzie:  $R = -l_R \left| \frac{\nabla T_R^4}{\omega T_R^4} \right|$ ,  $\omega = \frac{l_R}{l_P} \left( \frac{T_e}{T_r} \right)^4 + 1 - \frac{l_R}{l_P}$  -efektywne albedo.

W optycznie gęstej plazmie, gdy  $R \rightarrow 0$ , to  $\lambda(R) \rightarrow 1/3$ , a w optycznie rzadkiej, gdy  $R \rightarrow \infty$   $\lambda(R)$  to  $1/R^2 \rightarrow 0$

Na swobodnej powierzchni przyjmując warunek brzegowy wynikający z bilansu strumieni energii:

$$\vec{n} \cdot \vec{F} + 1/2 ca T_R^4 = 0 \quad (4.116)$$

Wyznaczanie zasięgów Rosselanda i Plancka jest bardzo złożonym zadaniem szczególnie dla pierwiastków o dużym Z. W kodach hydrodynamicznych korzysta się najczęściej z uśrednionych po częstościach przybliżonych wyrażeń analitycznych [66], [67].

W pracach tych podano przybliżone zależności dla nieprzezroczystości (opacity)  $k_R, k_P$ , które związane są z długościami Rosselanda i Plancka zależnościami  $l_R = \frac{1}{k_R \rho}$ ,  $l_P = \frac{1}{k_P \rho}$

Nieprzezroczystości są aproksymowane funkcją postaci  $K = A T^s [keV] \rho^r \left[ \frac{g}{cm^3} \right]$

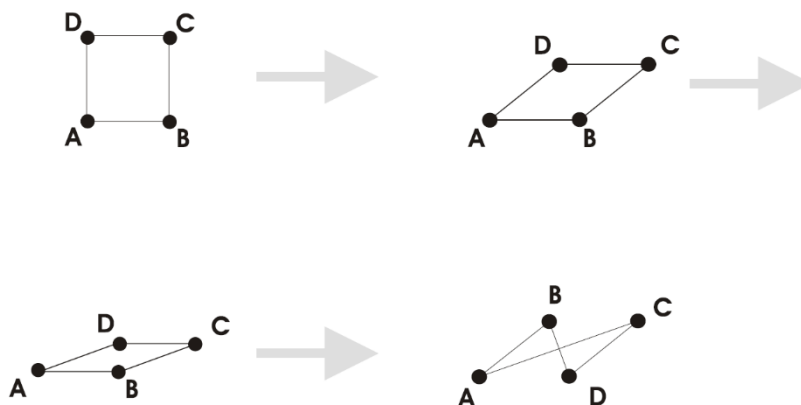
Wartości stałych dla wybranych pierwiastków zamieszczone są w tabeli Tab 4.1. Temperaturą podaje się w keV a gęstość w  $g/cm^3$ . A

Tab. 4.1 Stałe dla aproksymacji nieprzezroczystości dla różnych pierwiastków

Pierwiastek	k <sub>R</sub>			k <sub>P</sub>		
	A	r	s	A	s	r
Al	3,78	-2,482	0,481	34,18	-2,415	0,483
Ti	7,19	-2,209	0,386	85,84	-2,071	0,436
Fe	9,74	-2,268	0,314	89,97	-2,131	0,377
Cu	13,89	-2,207	0,295	100,81	-2,120	0,355
Mo	67,42	-1,493	0,222	315,86	-1,563	0,308
Sn	72,19	-1,571	0,160	328,55	-1,588	0,228
Ba	81,34	-1,619	0,142	324,04	-1,644	0,244
Eu	129,3	-1,450	0,094	413,90	-1,536	0,238
W	244,12	-1,119	0,005	646,40	-1,225	0,199
Au	279,9	-1,058	0,001	666,01	-1,223	0,165
Pb	290,54	-1,047	0,000	615,51	-1,270	0,155
U	295,05	-1,145	0,037	590,61	-1,415	0,194

## 5. Opis modelu numerycznego

W czasie ewolucji plazmy w układach typu z-pinch silnie zmieniają się parametry geometryczne i wielkości fizyczne. Pojawiają się ostre gradienty i przepływy plazmy z falami uderzeniowymi. Istotną rolę odgrywa promieniowanie i jonizacja. Dynamika takiej plazmy opisywana jest układami równań radiacyjnej magnetohydrodynamiki. Tradycyjne metody numeryczne stosowane do rozwiązywania równań hydrodynamiki dzielą się ze względu na opis ośrodka ciągłego na metody typu Eulera i Lagrange'a [68]. Eulerowskie metody numeryczne są rozwijane od wielu lat. [69]. Pierwszy kod MHD Pottera opisujący dynamikę plazmy w układzie Plasma Focus był kodem eulerowskim. Jednak do opisu zjawisk, gdzie występują duże odkształcenia i ostre gradienty wygodniejszy jest układ zmiennych Lagrange'a, w którym siatka numeryczna porusza się razem z ośrodkiem. W opisie Lagrange'a łatwiejsze jest uwzględnienie kontaktów różnych ośrodków oraz swobodnych granic. Kody te rozwijane są w dużych laboratoriach zajmujących się syntezą inercyjną [70]. W dwuwymiarowych (dwie zmienne przestrzenne) symulacjach za pomocą kodów w zmiennych Lagrange'a pojawia się problem silnych deformacji siatki numerycznej (Rys.5.1).



*Rys.5.1 Przykład deformacji siatki lagranżowskiej prowadzącej do przerwania obliczeń*

Może to prowadzić do nie fizycznych rezultatów. Aby temu zaradzić stosuje się skomplikowane procedury przebudowy siatki (remapping). Przyczyną patologicznych deformacji siatki jest trwałe powiązanie ze sobą jej węzłów w trakcie całego procesu. W czasie ruchu ośrodka bliskie na początku punkty mogą się bardzo oddalić. Rezygnacja z trwałego powiązania węzłów jest podstawą metod bezsiatkowych [71]. Metody te pozwalają uniknąć patologicznych deformacji i są wygodne przy modelowaniu zagadnień dynamicznych z dużymi deformacjami i swobodnymi powierzchniami. Ich idea opiera się na aproksymacji wielkości fizycznych i ich gradientów w węzłach na podstawie informacji

zawartych w węzłach z najbliższego otoczenia. Najbardziej znana metoda bezsiatkową to metoda SPH (smooth particle hydrodynamic) [72].

W tej i podobnych metodach (Hp clouds, reproducing kernel, partition of unity) węzły siatki to cząstki posiadające swoją własną masę i poruszające się w polu sił. Pozostałe wielkości fizyczne i gradienty określa się za pomocą specjalnych procedur uśredniania.

Historycznie pierwszą metodą bezsiatkową była metoda cząstek swobodnych, która została opracowana przez Dyachenko [73] specjalnie dla modelowania dynamiki plazmy w układzie Plasma Focus [74]. Mimo jej zalety i zachęcających pierwszych rezultatów została ona zarzucona przez jej twórcę. Metoda ta została zmodyfikowana przez Jacha [75] i zastosowana w złożonych kodach modelujących zjawiska kumulacji i przebijania.

W mojej pracy przedstawiam wyniki dalszego rozwoju metody punktów swobodnych. Podstawową ideą zaproponowaną przez Dyachenko była rezygnacja z tradycyjnej siatki numerycznej, której węzły są stale ze sobą związane.

W danym obszarze rozmieszczone są regularnie w chwili początkowej punkty. Każdemu z nich przyporządkowany jest zbiór innych punktów - tzw. "sąsiadów" z najbliższego otoczenia danego na podstawie których aproksymowane są wszystkie gradienty wielkości fizycznych. W tej metodzie najważniejsze to sposób wyboru sąsiadów i metoda aproksymacji pochodnych.

Równania MHD w zmiennych Lagrange'a mają ogólną postać:

$$\frac{dF_i}{dt} = G_i(x_k, F_j, \nabla F_j, \nabla^2 F_j) \quad (5.1)$$

gdzie:  $i, j = 1, \dots, M$ ;  $M$ - liczba zmiennych zależnych. Modelowane zjawiska najwygodniej jest rozpatrywać w układzie cylindrycznym. Dla zagadnienie dwuwymiarowego 2D są to zmienne  $(r, z)$ .

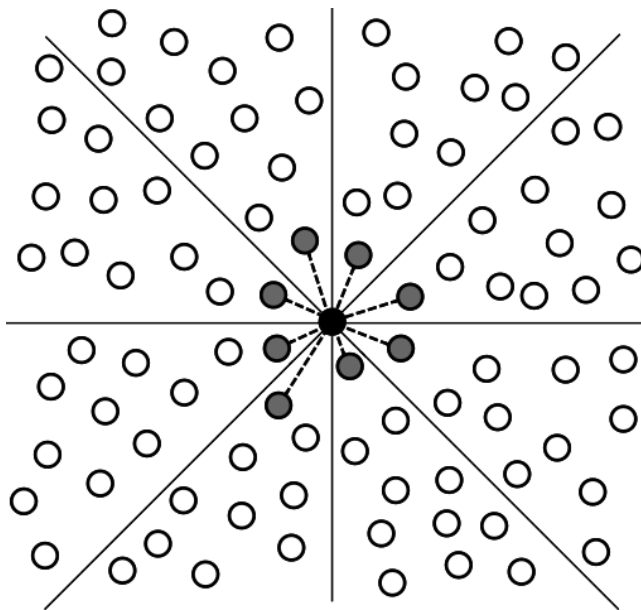
Lewa strona równań to tzw. pochodna substancjalna opisująca zmianę parametrów ośrodka dla poruszającej się cząstki materialnej jest przedstawiana w modelu numerycznym w standardowy sposób:

$$\frac{dF_i}{dt} \approx \frac{F_i^{n+1} - F_i^n}{\Delta t} \quad (5.2)$$

Gdzie  $F_i^{n+1}, F_i^n$  wartości  $F_i$  w momencie czasu  $t+\Delta t$  i  $t$ . Występujące po lewej stronie równań pochodne w danym punkcie są aproksymowane na podstawie informacji zawartej w punktach sąsiednich i branych w chwili  $t$ . Jest to tzw. jawna aproksymacja. Jawne schematy różnicowe są przyjęte przy opisie części hiperbolicznej równań MHD. Jawna aproksymacja członów dyfuzyjnych, z drugimi pochodnymi prowadzi do silnego ograniczenia kroku czasowego. Długo sadzono, że w metodzie swobodnych punktów nie daje się zbudować algorytmu niejawnego dla członów dyfuzyjnych. Stosowanie metod

jawnych powodowało silne ograniczenie kroku czasowego. Moim wkładem w rozwój tej metody było stworzenie stosunkowo prostego, niejawnego algorytmu

Jach zaproponował uproszczenie metodyki Dyachenki wyznaczania pierwszych pochodnych. Oryginalna metoda Dyachenki oparta była na lokalnym rozwiązaniu uproszczonych równań hydrodynamiki za pomocą całki Poissona. Prowadziło to dość skomplikowanych formuł. Uśrednia się w niej pochodne uzyskane dla z aproksymacji dla trójkątnych komórek utworzonych z kolejnych punktów sąsiednich. W zmodyfikowanej wersji metody punktów swobodnych wartości pochodnych uzyskuje się przybliżając lokalnie rozkład danej wartości płaszczyzną. Uzyskanie najlepszego przybliżenie zapewnia metoda najmniejszych kwadratów. Układ punkt centralny i wybrane z 8 sektorów kątowych punkty sąsiednie (tzw. „gwiazda”) przedstawiony jest na Rys. 5.2



Rys. 5.2 Punkt centralny i związane z nim punkty z sąsiednich sektorów kątowych

Przedstawiamy lokalnie w otoczeniu punktu  $(r_0, z_0)$  daną wielkość w postaci liniowej części rozwinięcia w szereg Taylora, która najlepiej przybliży rozkłady danej wartości w punktach sąsiednich i przechodzi przez dany punkt

$$f(r, z) = f(r_0, z_0) + (r - r_0) \cdot f_r + (z - z_0) \cdot f_z \quad (5.3)$$

Występujące w tym rozwinięciu składowe gradientu są współczynnikami kierunkowymi płaszczyzny. Takie podejście różni się od metody Moving Least Square (MLS), w której aproksymuje się lokalnie wartości funkcji wielomianami, ale nie zakłada się przy tym, że wielomian przyjmuje daną wartość w punkcie  $(r_0, z_0)$ . W celu wyznaczenia pochodnych minimalizuje się następujący funkcjonał

$$L = \sum_{k=1}^{k=N} (f(r_k, z_k) - f(r_0, z_0) - (r_k - r_0) \cdot f_r - (z_k - z_0) \cdot f_z)^2 \cdot w_k \quad (5.4)$$



gdzie:  $N$  - ilość sąsiadów,  $w_k(r_k)$  - waga zależna od odległości  $r_k = \sqrt{(r_k - r_0)^2 + (z_k - z_0)^2}$

Waga określa wkład punktów w zależności od ich położenia. W pierwszych wersjach kodu używana była waga w postaci  $w_k = 1/r_k^2$ . Niestety ze względu na osobliwość wyostrza ona bardzo gradienty w przypadku silnego zbliżenia punktów. Aby tego uniknąć przyjąłem wagę w postaci:

$$w_k = \frac{d_0^2}{d_0^2 + r_k^2} \quad (5.5)$$

Wielkość  $d_0$  wyznaczam iteracyjnie z warunku normalizacji  $\sum_{k=1}^N w_k = 1$ . Takie podejście usuwa osobliwość i poprawia wyznaczanie gradientów.

Wartości pochodnych  $f_r, f_z$  wyznaczane są teraz standardową metodą najmniejszych kwadratów. Warunek minimum funkcji  $L$  daje dwa równania:

$$\frac{\partial L(f_r, f_z)}{\partial f_r} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial L(f_r, f_z)}{\partial f_z} = 0 \quad (5.6)$$

Ponieważ funkcja  $L(f_r, f_z)$  jest zawsze dodatnia to równania te określają minimum.

Prowadzą one do następującego układu równań, z którego wyznaczane są składowe gradientu:

$$\begin{bmatrix} A_{RR} & A_{RZ} \\ A_{RZ} & A_{ZZ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_r \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_R \\ B_Z \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A_{RR} &= \sum_{k=1}^{k=N} (r_k - r_0)^2 \cdot w_k, & A_{ZZ} &= \sum_{k=1}^{k=N} (z_k - z_0)^2 \cdot w_k \\ A_{RZ} &= \sum_{k=1}^{k=N} (r_k - r_0)(z_k - z_0) \cdot w_k, & B_R &= \sum_{k=1}^{k=N} (f_k - f_0)(r_k - r_0) \cdot w_k \\ & & B_Z &= \sum_{k=1}^{k=N} (f_k - f_0)(z_k - z_0) \cdot w_k \end{aligned}$$

Składowe gradientu wyrażają się następującymi wzorami:

$$f_r = \frac{B_R A_{ZZ} - B_Z A_{RZ}}{A_{RR} A_{ZZ} - A_{RZ} A_{RZ}} \quad f_z = \frac{B_Z A_{RR} - B_R A_{RZ}}{A_{RR} A_{ZZ} - A_{RZ} A_{RZ}} \quad (5.8)$$

W takim podejściu łatwo uwzględnić warunki brzegowe lub ograniczenia narzucone na funkcje. Szukamy w tym wypadku ekstremum warunkowego stosując metodę mnożników Lagrange'a.

Ogólna postać warunku brzegowego jest następująca:

$$\alpha f_r + \beta f_z + \gamma = 0$$

(5.9)

Tworzymy funkcję Lagrange'a:  $L(f_r, f_z) + \mu(\alpha f_r + \beta f_z + \gamma)$ . Następnie różniczkujemy tę funkcję i wyznaczamy składowe gradientu w zależności od parametru  $\mu$  z układu równań:

$$\begin{bmatrix} A_{RR} & A_{RZ} \\ A_{RZ} & A_{ZZ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_r \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_R + \mu\alpha \\ B_Z + \mu\beta \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Korzystając z warunku brzegowego (5.9) redukujemy parametr  $\mu$  i wyznaczamy składowe gradientu z uwzględnieniem warunku brzegowego. Oznaczając przez  $f_r^s, f_z^s$  niezmodyfikowane wartości gradientów, a przez  $f_r^b, f_z^b$  wielkości:

$$f_r^b = \frac{\alpha A_{ZZ} - \beta A_{RZ}}{A_{RR}A_{ZZ} - A_{RZ}A_{RZ}}; \quad f_z^b = \frac{\beta A_{RR} - \alpha A_{RZ}}{A_{RR}A_{ZZ} - A_{RZ}A_{RZ}} \quad (5.11)$$

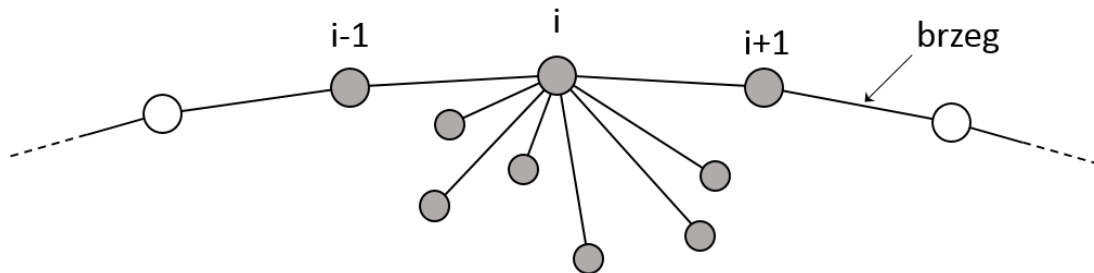
końcowy wynik można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} f_r &= f_r^s - f_r^b \cdot \frac{\alpha f_r^s + \beta f_z^s + \gamma}{\alpha f_r^b + \beta f_z^b + \gamma} = f_r^s \cdot \left(1 - \frac{\alpha f_r^b}{\alpha f_r^b + \beta f_z^b + \gamma}\right) - f_z^s \cdot \left(\frac{\beta f_r^b}{\alpha f_r^b + \beta f_z^b + \gamma}\right) - \left(\frac{\gamma f_r^b}{\alpha f_r^b + \beta f_z^b + \gamma}\right) \\ f_z &= f_z^s - f_z^b \cdot \frac{\alpha f_r^s + \beta f_z^s + \gamma}{\alpha f_r^b + \beta f_z^b + \gamma} = f_z^s \cdot \left(1 - \frac{\beta f_z^b}{\alpha f_r^b + \beta f_z^b + \gamma}\right) - f_r^s \cdot \left(\frac{\beta f_r^b}{\alpha f_r^b + \beta f_z^b + \gamma}\right) - \left(\frac{\gamma f_z^b}{\alpha f_r^b + \beta f_z^b + \gamma}\right) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Dla równań dla temperatury elektronowej i radiacyjnej wyraz wolny w warunku brzegowym zależy od temperatur

$$\begin{aligned} f_r &= f_r^s \cdot C_r^r + f_z^s \cdot C_z^r + D_0^r \cdot f \\ f_z &= f_z^s \cdot C_z^z + f_r^s \cdot C_r^z + D_0^z \cdot f \end{aligned} \quad (5.13)$$

W ostatniej wersji kodu zmieniono podejście do warunków brzegowych. Teraz służą one do wyznaczania wartości funkcji w punktach brzegowych. Występujące w obliczeniach pochodnych w warunku brzegowym, wartości funkcji w sąsiednich punktach łańcucha (Rys. 5.3) traktowane są jako niewiadome co prowadzi do trójpasowego układu równań liniowych rozwiązywanego metodą progonki. Dla warunku na strumieniu pędu na brzegu stosuję progonkę macierzową



Rys. 5.3 Łańcuch punktów brzegowych z otoczeniem sąsiadów

W równaniach nieidealnej magnetohydrodynamiki pojawiają się w równaniach człony z drugimi pochodnymi. Naturalnym sposobem przyjętym przez Dyachenkę jest interpolacja wielomianem drugiego rzędu dwóch zmiennych o postaci:

$$L(f_r, f_z, f_{rr}, f_{rz}, f_{zz}) = \sum_{k=1}^{k=N} \left( f^k - f^0 - \Delta r_k f_r - \Delta z_k f_z - \frac{1}{2} ((\Delta r_k)^2 f_{rr} + 2\Delta r_k \Delta z_k f_{rz} + (\Delta z_k)^2 f_{zz}) \right)^2 \cdot w_k \quad (5.14)$$

Przy takim sposobie interpolacji okazuje się że człony drugiego rzędu są dominujące. Otrzymuje się zaniżone wartości pierwszych pochodnych. W pracy [63] zaproponowano wyznaczanie drugich pochodnych poprzez ponowne zastosowanie podstawowego algorytmu wyznaczania pierwszych pochodnych dla strumieni. Metoda ta dała zadowalające rezultaty. Wadą tego podejścia jest wprowadzenie dużej sztucznej dyfuzji spowodowanej rozmyciem interpolacji drugich pochodnych na większy zbiór punktów.

Aby uniknąć wad obu metod zaproponowałem następujący algorytm wyznaczania drugich pochodnych. Składa się on z dwóch etapów. Na początku wyznaczone są pierwsze pochodne. W kolejnym etapie, w każdym z sąsiednich punktów wyliczamy resztę pozostałą po aproksymacji płaszczyzną:

$$\Delta f_k = f^k - f^0 - f_r \Delta r_k - f_z \Delta z_k. \quad (5.15)$$

Reszty te aproksymujemy za pomocą wielomianu drugiego stopnia, teraz już bez wyrazów liniowych:

$$L(f_{rr}, f_{rz}, f_{zz}) = \sum_{k=1}^{k=N} \left( \Delta f^k - \frac{1}{2} ((\Delta r_k)^2 f_{rr} + 2\Delta r_k \Delta z_k f_{rz} + (\Delta z_k)^2 f_{zz}) \right)^2 w_k \quad (5.16)$$

Z warunku na minimum tej funkcji:

$$\frac{\partial L(f_{rr}, f_{rz}, f_{zz})}{\partial f_{rr}} = 0; \quad \frac{\partial L(f_{rr}, f_{rz}, f_{zz})}{\partial f_{rz}} = 0; \quad \frac{\partial L(f_{rr}, f_{rz}, f_{zz})}{\partial f_{zz}} = 0 \quad (5.17)$$

Z warunków tych otrzymuje się układ 3 równań liniowych z których wyznaczamy drugie pochodne:

$$\begin{bmatrix} A_{R4} & A_{R3Z} & A_{R2Z2} \\ A_{R3Z} & A_{R2Z2} & A_{RZ3} \\ A_{R2Z2} & A_{RZ3} & A_{Z4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{rr} \\ 2f_{rz} \\ f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{R2} \\ B_{RZ} \\ B_{Z2} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

gdzie:

$$A_{R4} = \sum_{k=1}^{k=N} (r_k - r_0)^4; \quad A_{R3Z} = \sum_{k=1}^{k=N} (r_k - r_0)^3 (z_k - z_0)$$

$$A_{RZ3} = \sum_{k=1}^{k=N} (r_k - r_0) (z_k - z_0)^3, A_{R2Z2} = \sum_{k=1}^{k=N} (r_k - r_0)^2 (z_k - z_0)^2$$

$$A_{Z4} = \sum_{k=1}^{k=N} (z_k - z_0)^4$$

$$B_{R2} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{k=N} \Delta f^k (r_k - r_0)^2; B_{RZ} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{k=N} \Delta f^k (r_k - r_0) (z_k - z_0)$$

$$B_{Z2} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{k=N} \Delta f^k (r_k - r_0)^2$$

Rozwiązanie tego układu można przedstawić w wygodnej do dalszych rozważań postaci:

$$f_{rr} = B_{R2} \cdot A_{11} + B_{RZ} \cdot A_{12} + B_{Z2} \cdot A_{13}$$

$$2f_{rz} = B_{R2} \cdot A_{21} + B_{RZ} \cdot A_{22} + B_{Z2} \cdot A_{23}$$

$$f_{zz} = B_{R2} \cdot A_{31} + B_{RZ} \cdot A_{32} + B_{Z2} \cdot A_{33}$$

(5.19)

gdzie: współczynniki  $A_{ij}$  to odpowiednie minory wyjściowego układu dzielone przez wyznacznik główny. Tak wyznaczone wartości drugich pochodnych używane są w głównej wersji kodu.

Przedstawiony algorytm wyznaczania drugich pochodnych pozwala na opracowanie wersji niejawnej.

$$G_k^{rr} = 2 \cdot (\Delta r_k)^2; G_k^{zz} = 2 \cdot (\Delta z_k)^2; G_k^{rz} = 2 \cdot \Delta r_k \Delta z_k$$

(5.20)

Rozwiązanie dla drugich pochodnych można przedstawić w postaci:

$$f_{rr} = \sum_{k=1}^{k=N} \Delta f_k (A_{11} G_k^{rr} + A_{12} G_k^{rz} + A_{13} G_k^{zz}) = \sum_{k=1}^{k=N} \Delta f_k \cdot \alpha_k^{rr}$$

$$f_{rz} = \sum_{k=1}^{k=N} \Delta f_k (A_{21} G_k^{rr} + A_{22} G_k^{rz} + A_{33} G_k^{zz}) = \sum_{k=1}^{k=N} \Delta f_k \cdot \alpha_k^{rz}$$

$$f_{zz} = \sum_{k=1}^{k=N} \Delta f_k (A_{31} G_k^{rr} + A_{32} G_k^{rz} + A_{33} G_k^{zz}) = \sum_{k=1}^{k=N} \Delta f_k \cdot \alpha_k^{zz}$$

(5.21)

Dla wygody rozwiązanie dla pierwszych pochodnych można zapisać w podobnej postaci jako kombinację liniową wartości funkcji w punktach sąsiednich:

$$f_r = \sum_{k=1}^{k=N} \Delta f_k \beta_k^r = A_r^r \sum_{k=1}^{k=N} \Delta f_k \Delta r_k - A_z^r \sum_{k=1}^{k=N} \Delta f_k \Delta z_k$$

$$f_z = \sum_{k=1}^{k=N} \Delta f_k \beta_k^z = -A_r^z \sum_{k=1}^{k=N} \Delta f_k \Delta r_k + A_z^z \sum_{k=1}^{k=N} \Delta f_k \Delta z_k$$

(5.22)

gdzie:  $A_r^r = \frac{A_{ZZ}}{A_{RR}A_{ZZ} - A_{RZ}A_{RZ}}$ ;  $A_z^r = \frac{A_{RZ}}{A_{RR}A_{ZZ} - A_{RZ}A_{RZ}}$ ;  $A_r^z = \frac{A_{RZ}}{A_{RR}A_{ZZ} - A_{RZ}A_{RZ}}$ ;  $A_z^z = \frac{A_{RR}}{A_{RR}A_{ZZ} - A_{RZ}A_{RZ}}$

Mamy  $A_z^r = A_r^z$ .

Reszty  $\Delta f_k$  można teraz przedstawić w wygodnej postaci, z wydzieleniem wkładu do punktu centralnego:

$$\Delta f_k = f_k - f_0 - \sum_{l=1}^{l=N} (f_l - f_0) (\beta_l^r \Delta r_k + \beta_l^z \Delta z_k) =$$

$$-f_0 \left[ 1 - \sum_{l=1}^{l=N} (\beta_l^r \Delta r_k + \beta_l^z \Delta z_k) \right] - \sum_{l=1}^{l=N} f_l (\beta_l^r \Delta r_k + \beta_l^z \Delta z_k - \delta_{lk})$$

(5.23)

Wykorzystując tę zależność można teraz wyrażenie dla drugiej pochodnej  $f_{rr}$  zapisać w następujący sposób

$$f_{rr} = \sum_{k=1}^{k=N} \Delta f_k \cdot \alpha_k^{rr} =$$

$$\sum_{k=1}^{k=N} \alpha_k^{rr} \left\{ -f_0 \left[ 1 - \sum_{l=1}^{l=N} (\beta_l^r \Delta r_k + \beta_l^z \Delta z_k) \right] - \sum_{l=1}^{l=N} f_l (\beta_l^r \Delta r_k + \beta_l^z \Delta z_k - \delta_{lk}) \right\} =$$

$$f_0 \left\{ - \sum_{k=1}^{k=N} \alpha_k^{rr} + \sum_{k=1}^{k=N} \alpha_k^{rr} \Delta r_k \left( \sum_{l=1}^{l=N} \beta_l^r \right) + \sum_{k=1}^{k=N} \alpha_k^{rr} \Delta z_k \left( \sum_{l=1}^{l=N} \beta_l^z \right) \right\} - \left( \sum_{k=1}^{k=N} \alpha_k^{rr} \Delta r_k \right) \sum_{l=1}^{l=N} f_l \beta_l^r -$$

$$\left( \sum_{k=1}^{k=N} \alpha_k^{rr} \Delta z_k \right) \sum_{l=1}^{l=N} f_l \beta_l^z + \sum_{k=1}^{k=N} \alpha_k^{rr} \cdot f_k$$

(5.24)

Stąd można określić wkład poszczególnych punktów sąsiednich przy wyznaczaniu drugiej pochodnej dla danego punktu. Wkład od poszczególnych punktów z jego otoczenia jest następujący:

$$[f_{rr}]_{ii} = - \sum_{k=1}^{k=N} \alpha_k^{rr} + \sum_{k=1}^{k=N} \alpha_k^{rr} \Delta r_k \left( \sum_{l=1}^{l=N} \beta_l^r \right) + \sum_{k=1}^{k=N} \alpha_k^{rr} \Delta z_k \left( \sum_{l=1}^{l=N} \beta_l^z \right)$$

$$[f_{rr}]_{ik} = \alpha_k^{rr} - \beta_k^r \left( \sum_{l=1}^{l=N} \alpha_l^{rr} \Delta r_l \right) - \beta_k^z \left( \sum_{l=1}^{l=N} \alpha_l^{rr} \Delta z_l \right) \quad (5.25)$$

Ostatecznie otrzymujemy końcowe formuły:

$$\begin{aligned} [f_{rr}]_{ii} &= - \sum_{k=1}^{k=N} \alpha_k^{rr} + \sum_{k=1}^{k=N} \alpha_k^{rr} \Delta r_k \left( A_r^r \sum_{l=1}^{l=N} \Delta r_l - A_z^r \sum_{l=1}^{l=N} \Delta z_l \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{k=N} \alpha_k^{rr} \Delta z_k \left( -A_z^r \sum_{l=1}^{l=N} \Delta r_l + A_z^z \sum_{l=1}^{l=N} \Delta z_l \right) \\ [f_{rr}]_{ik} &= \alpha_k^{rr} - (A_r^r \Delta r_k - A_z^r \Delta z_k) \left( \sum_{l=1}^{l=N} \alpha_l^{rr} \Delta r_l \right) - (-A_z^r \Delta r_k + A_z^z \Delta z_k) \left( \sum_{l=1}^{l=N} \alpha_l^{rr} \Delta z_l \right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Dla punktów leżących na brzegu formuły te są zmodyfikowane z uwzględnieniem warunku brzegowego.

Oznaczając:

$$\begin{aligned} D_r^r &= -C_r^z \cdot A_z^r + C_z^z \cdot A_z^z ; D_z^r = C_r^r \cdot A_z^r - C_r^z \cdot A_z^z ; D_r^z = C_z^z \cdot A_r^r - C_r^z \cdot A_r^r ; \\ D_z^z &= -C_r^z \cdot A_z^r + C_z^z \cdot A_z^z \end{aligned}$$

Dla punktów brzegowych otrzymujemy następujące formuły:

$$\begin{aligned} [f_{rr}]_{ii} &= - \sum_{k=1}^{k=N} \alpha_k^{rr} + \sum_{k=1}^{k=N} \alpha_k^{rr} \Delta r_k \left( D_r^r \sum_{l=1}^{l=N} \Delta r_l - D_z^r \sum_{l=1}^{l=N} \Delta z_l + D_r^0 \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{k=N} \alpha_k^{rr} \Delta z_k \left( -D_r^z \sum_{l=1}^{l=N} \Delta r_l + D_z^z \sum_{l=1}^{l=N} \Delta z_l + D_z^0 \right) \\ [f_{rr}]_{ik} &= \alpha_k^{rr} - (D_r^r \Delta r_k - D_z^r \Delta z_k) \left( \sum_{l=1}^{l=N} \alpha_l^{rr} \Delta r_l \right) - (-D_r^z \Delta r_k + D_z^z \Delta z_k) \left( \sum_{l=1}^{l=N} \alpha_l^{rr} \Delta z_l \right) \end{aligned} \quad (5.27)$$

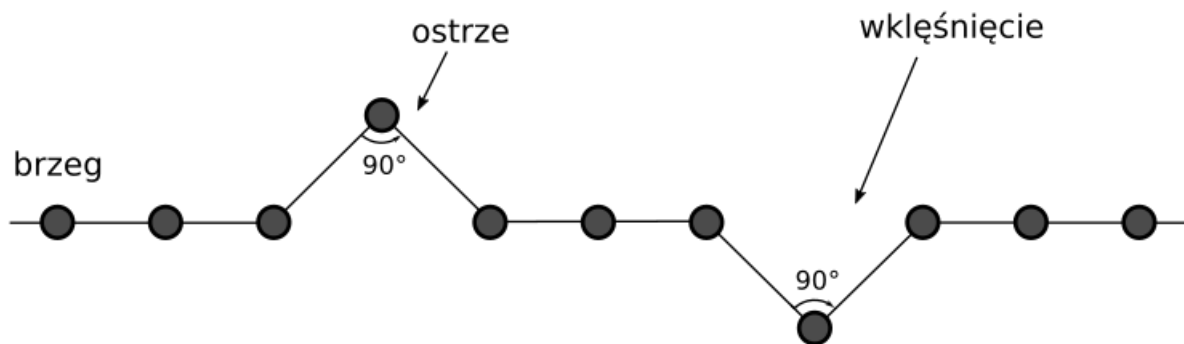
Stosując jeden ze schematów niejawnych otrzymujemy układ  $L \times L$  równań ( $L$  - ilość punktów), w którym w każdym wierszu różnych od zera jest  $N+1$  ( $N$  - ilość sąsiadów) współczynników. Niezerowe elementy macierzy współczynników rozmieszczone są nieregularnie. Do rozwiązywania takich "rozrzedzonych" układów równań korzysta się ze specjalistycznych bibliotek podprogramów.

W większości modeli bezsiatkowych przy aproksymacji pochodnych bierze się pod uwagę wszystkie punkty z pewnego otoczenia (tzw. nośnika) danego punktu. W metodzie punktów swobodnych ograniczamy się do punktów z najbliższego otoczenia wybranych tak, aby pokrywały one w miarę równomiernie pełny kąt wokół danego punktu.

Algorytm wyboru sąsiadów jest czasochłonny i dlatego wykonywany jest co kilkanaście kroków czasowych. Opracowano algorytm wstawiania nowych punktów w przypadku niezapełnienia więcej niż jednego sektora kąтового. Jest to szczególnie ważne przy rozwiązywaniu równania transportu promieniowania. Szczególnie algorytm niejawnym jest czuły na regularne rozmieszczenie punktów.

Ceną za prostotę algorytmu jest pojawienie się charakterystycznych dla tej metody niestabilności geometrycznych, które prowadzą do przerwania obliczeń. Niestabilności te pojawiają się na brzegu – są to lokalne ostrza lub wklęsnięcia, lub w jego pobliżu są to punkty krytycznie zbliżone do brzegu. Jeżeli procedura kontrolna znajdzie punkt brzegu, w którym występuje ostrze (wklęsnięcie) Rys. 5.4 niestabilność jest usuwana przez lokalne „prostowanie” brzegu. Nowym położeniem punktu jest teraz środek odcinka łączącego punkty brzegowe między którymi leży dany punkt.

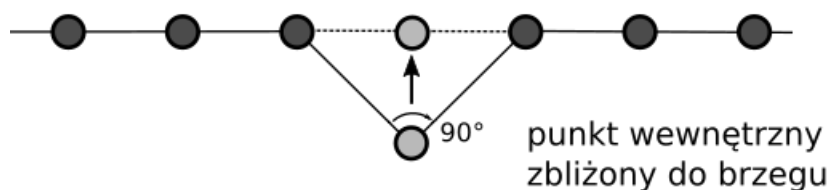
A)



Rys.5.4 Niestabilności brzegu typu „ostrze” i „wklęsnięcie”

Innym typem niestabilności charakterystycznej dla punktów brzegowych jest tzw. niestabilność zbliżeniowa. Punkt wewnętrzny zbliżony do brzegu wstawiany jest między dwa najbliższe punkty brzegowe i zmienia swój status Rys.5.5

B)



Rys. 5.5 Punkt zbliżony do brzegu

Do modelu rozwiązującego równania MHD metodą cząstek swobodnych dołączony jest pakiet rozwiązujący równanie kinetyki jonizacji. W przypadku gazu (wodoru) do rozwiązania niestacjonarnego równania kinetyki jonizacji i sprzężonego z nim równania dla temperatury elektronowej wystarczy standardowa metoda Rungego-Kutty z "ułamkowym" krokiem czasowym (zwykle  $dt_{jon} = 0.1dt_{hyd}$ ). Dla gęstej plazmy staje się ono równaniem sztywnym ze względu na silną nieliniowość współczynników.

Zmniejszanie kroku w standardowej metodzie Rungego Kutty nie daje stabilnego rozwiązania. Konieczne jest stosowanie bardziej zaawansowanych metod, w których uwzględnia się macierz Jacobiego prawej strony równania  $dx/dt = f(x)$  które można przedstawić w postaci:

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{i=1}^R p_i k_i \quad (5.28)$$

gdzie:  $k_1 = hf_n + \alpha_1 h \frac{\partial f_n}{\partial x} k_1$ ;  $k_i = hf(x_n + \sum_{s=1}^i \beta_{is}) + \alpha_i h \frac{\partial(x_n + \sum_{s=1}^i \gamma_{is} k_s)}{\partial x} k_i$

$\alpha_i, \beta_{is}, \gamma_{is}, p_i$  - parametry metody.

W kodzie zastosowałem metodę 4 rzędu z parametrami zaczerpniętymi z pracy [76]:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 1/16, \gamma_{21} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = \gamma_{41} = \gamma_{42} = \gamma_{43} = 0 \\ \beta_{21} = -8/7, \beta_{31} = -0.038349269, \beta_{32} = 0.633370153, \beta_{41} = 1.206259208, \\ \beta_{42} = -0.369763356, \beta_{43} = -1.336495852 \\ p_1 = -0.485393761, p_2 = -0.1185393761 \end{aligned}$$

Krok czasowy w kodzie określony jest przez ograniczenia dla jawnej metody dla równania dyfuzji (temperatury, pola magnetycznego i prędkości):

$$dt = \min\left(\frac{dr^2 c_{ve}}{4 \cdot \chi^e}, \frac{dr^2 c_{vi}}{4 \cdot \chi^i}, \frac{dr^2 \pi}{\eta c^2}, \frac{dr^2 3 \cdot \rho}{4 \cdot \mu}\right) \quad (5.29)$$

Ograniczenie to jest silniejsze niż warunek stabilności Couranta-Friedrichsa dla równań MHD:

$$dt < dr / \sqrt{c_A^2 + c_s^2} \quad (5.30)$$

Procesy hydrodynamiczne kontrolowane są przez względny przyrost gęstości  $|\rho^{n+1} - \rho^n|/\rho^n$ . Gdy przyrost ten przekroczy 0.5 % krok czasowy zmniejszany jest 2 razy. Podobne ograniczenie na krok czasowy wprowadzone jest dla równania transportu promieniowania. Dla tego równania użyta została metoda niejawna, ale równanie jest silnie nieliniowe i wymaga iteracji. Ograniczenie na krok czasowy dla tego równania reguluje ilość iteracji. Ograniczenie na krok określone jest warunkiem:  $dt = dt \cdot$

$\min(\sqrt{0.1/\delta}, \text{gdzie } \delta = |E_r^{n+1} - E_r^n|/E_r^n$

Krok czasowy może wzrastać, gdy jest on mniejszy od minimalnego dopuszczalnego kroku.



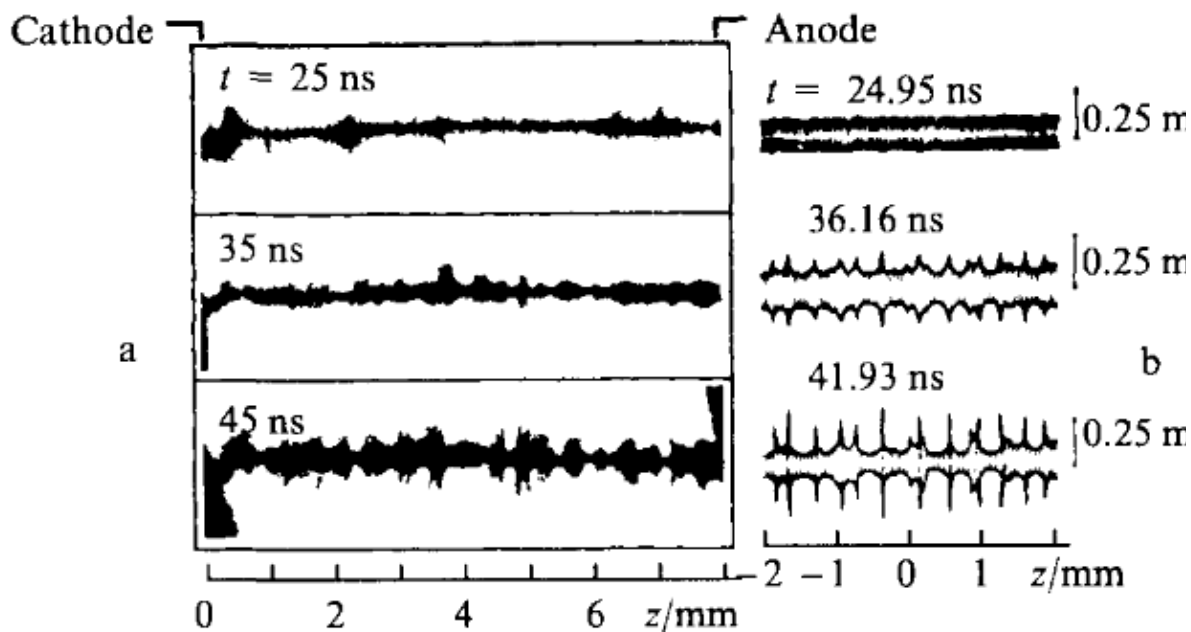
## 6. Wyniki symulacji

W rozdziale tym przedstawione są wyniki symulacji różnych układów opartych na zasadzie z-pinchu – eksplodującego drutu, X—pinchu i układu Plasma Focus uzyskanych za pomocą kodu wykorzystującego opisaną w poprzednim rozdziale metodę. Większość rezultatów była publikowana. Prezentowane są one w kolejności chronologicznej ilustrującej rozwój modeli fizycznych i kodu numerycznego.

### 6.1 Symulacje eksplodującego drutu

Prace nad rozwojem wersji MHD kodu opracowanego pierwotnie przez K. Jacha dla symulacji zjawisk czysto gazodynamicznych rozpoczęły się po nawiązaniu współpracy z grupą S. A. Pikuzy z Instytutu Fizyki AN Rosji im Lebediewa (FIAN). Koledzy z FIAN zaproponowali przeprowadzenie symulacji rozwoju niestabilności w trakcie kompresji plazmy powstałej w wyniku eksplozji przewodnika. Takie eksperymenty były prowadzone na układzie BIN w Moskwie. Do symulacji użyto wariantu kodu wykorzystującego prosty model oparty na idealnej MHD. Założono, że po początkowej fazie materiał przewodnika został całkowicie zjonizowany i utworzyła się kolumna plazmowa - pinch. Przyjęto początkowy rozkład pola magnetycznego wewnątrz pinchu odpowiadający jednorodnemu rozkładowi prądu - liniowy profil pola. W przybliżeniu idealnej MHD, gdy zakłada się, że przewodność plazmy jest nieskończona (oporność  $\eta = 0$ ) i pole magnetyczne w punkcie określane jest z warunku "wmrożenia" w plazmę  $\frac{B_\phi}{\rho r} = const$ . Model hydrodynamiczny uzupełniony został o siłę Ampera zapisaną w postaci  $\frac{1}{r} \nabla \frac{(rB_\phi)^2}{8\pi}$ . Prąd narastał liniowo w ciągu 100 ns do wartości 300 kA. Założono niewielkie początkowe, losowe zaburzenie gęstości równe 5%. początkowy promień pinchu wynosił 250  $\mu\text{m}$  a gęstość liniowa  $2 \times 10^{17} \text{cm}^{-1}$ . Z rezultatów przedstawionych na Rys. 6.1 widać, że do momentu osiągnięcia pierwszej kompresji sznur plazmowy jest prawie jednorodny. Rozwój niestabilności  $m=0$ . rozpoczyna się w fazie rozlotu. W jej końcowej fazie zaburzenia na kolumnie plazmowej przybierają charakterystyczny kształt dysków. Z porównania rezultatów obliczeń z fotografiami wykonanych techniką Schliera widać dobrą zgodność.

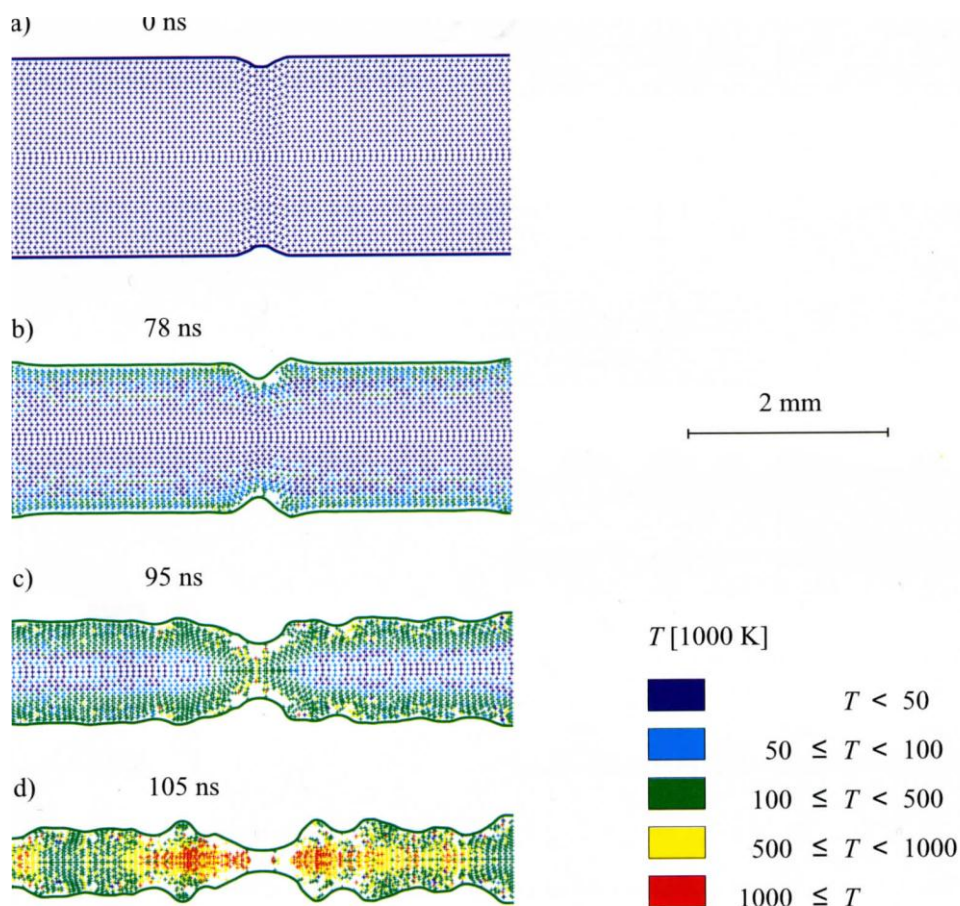
Dalszy rozwój kodu skierowany był w dwóch kierunkach. Prosty model idealnej magnetohydrodynamiki zastąpiony został pełnym układem równań MHD. Dołączono równania kinetyki jonizacji i uproszczone modele transportu promieniowania (przewodność radiacyjna). Do roku 1992 prace prowadzone były wspólnie z profesorem Karolem Jachem.



Rys. 6.1 Porównanie eksperymentalnych Schliren fotografii plazmy powstałej w wyniku eksplozji drucika wolframowego z otrzymanymi w symulacjach komputerowych konfiguracjami sznura plazmowego

Wyniki prac z tego okresu zostały zamieszczone w monografii [75]. Miały one charakter testu sprawdzającego możliwości kodu dla równań MHD.

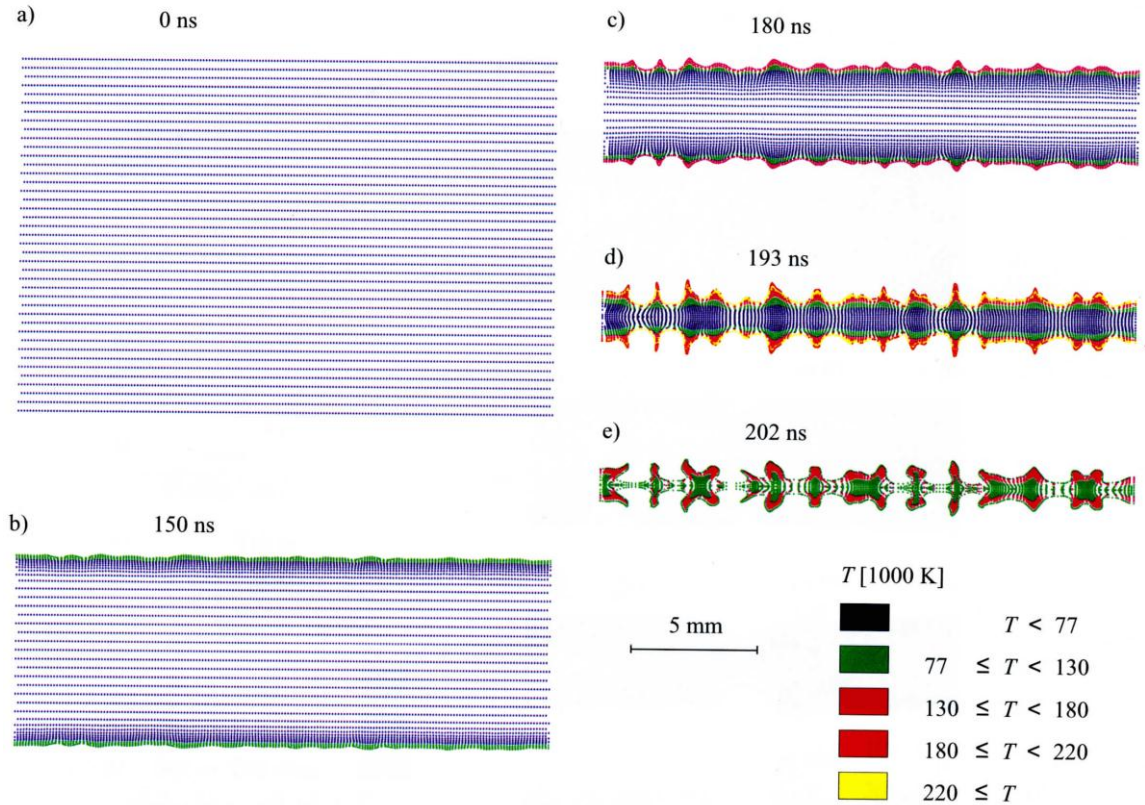
W pierwszym całkowicie samodzielnym krokiem było wprowadzenie nowej metodyki wyznaczania drugich pochodnych. Polepszyło to jakość obliczeń (mniejszy wpływ rozmycia numerycznego). Model przewodności radiacyjnej odpowiadający plazmie w równowadze termodynamicznej z promieniowaniem zastąpiony został stacjonarnym równaniem dla temperatury radiacyjnej.



Rys. 6.2 Rozwój niestabilności przewężeniowej inicjowanej jednym, początkowym zaburzeniem brzegu

Na Rys. 6.2 przedstawiono ewolucję przewężki niestabilności typu  $m=0$  sznura plazmowego. Przyjęto warunki początkowe zbliżone do warunków końcowej fazy eksplozji drutu na układzie BIN. Z wyników symulacji widać, że na kolumnie plazmowej oprócz głównej niestabilności pojawiają się następne. Odpowiadają one najszybciej rozwijającemu się modowi niestabilności  $m = 0$  dla której długość fali jest rzędu promienia kolumny plazmowej (pinchu)  $ka \sim 1$ . Można zauważyć charakterystyczny wpływ plazmy z obszaru przewężki z prędkością dźwięku

Następnym etapem rozwoju kodu było przejście do modelu nieidealnej MHD i uwzględnieniem procesów atomowych - jonizacji i promieniowania. Kod rozwijany był w celu symulacji eksperymentów prowadzonych w Instytucie Fizyki AN Rosji (FIAN) w Moskwie na układach Don i BIN. Podstawowe założenia modelu i opis metody numerycznej zostały przedstawione w pracy [77]. Wyniki zostały opublikowane w serii prac w czasopiśmie Plasma Physics Reports (Fizyka Plazmy). Przedstawię przegląd wykonanych symulacji.



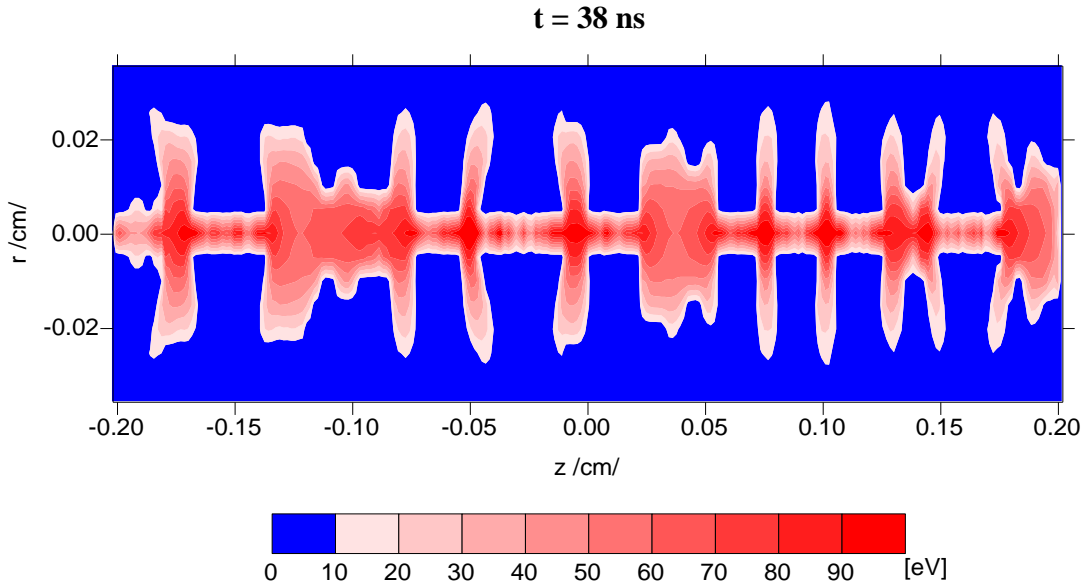
Rys. 6.3 Rozwój niestabilności przewężeniowych zainicjowanych losowym zaburzeniem początkowych parametrów plazmy wolframowej

W pracy [78], zaprezentowano rezultaty symulacji rozwoju przewężki niestabilności  $m=0$  w bardziej zaawansowanym modelu, fizycznym. Model oparty był o równania nieidealnej dwutemperaturowej MHD z uwzględnieniem jonizacji i stacjonarnego transportu promieniowania w przybliżeniu temperatury radiacyjnej (tzw. model trójtemperaturowy). Symulowany był rozwój przewężki dla drucików z wolframu, o początkowym promieniu  $10\mu\text{m}$ . Obliczenia startowały z następujących warunków początkowych: kolumna całkowicie zjonizowanej plazmy o promieniu  $500\mu\text{m}$ , parabolicznym rozkładzie i początkowej gęstości, temperaturze  $2\text{ eV}$  i z liniowym rozkładem pola magnetycznego. Założono sinusoidalne narastanie prądu od wartości  $10\text{ kA}$  do  $300\text{ kA}$  z półokresem  $100\text{ ns}$ . Ze względu na krótszy krok czasowy i zwiększenie ilości obliczeń symulacje były prowadzone na grubszej siatce. Obliczenia (Rys. 6.3) nie różniły się w sposób zasadniczy od poprzednich uproszczonych wariantów.

Na Rys. 6.4 przedstawione są rozkłady temperatury dla końcowej fazy obliczeń (obliczenia prowadzone były do momentu przerwania sznura plazmowego spowodowanego deficytem cząstek w obszarze obliczeń). Temperatura elektronowa w obszarze przewężki okazała się  $1.5$  mniejsza niż w modelu dwutemperaturowy.

Pomiary optyczne eksplozji cienkich drucików wykonywane za pomocą wielokadrowej cieniowej fotografii pokazały silną niejednorodność takich wyładowań. Stosunkowa rzadka plazma korony, przez którą przepływa większość prądu otacza gęsty, zimny rdzeń. Jest to szczególnie widoczne w przypadku gorzej przewodzących metali.

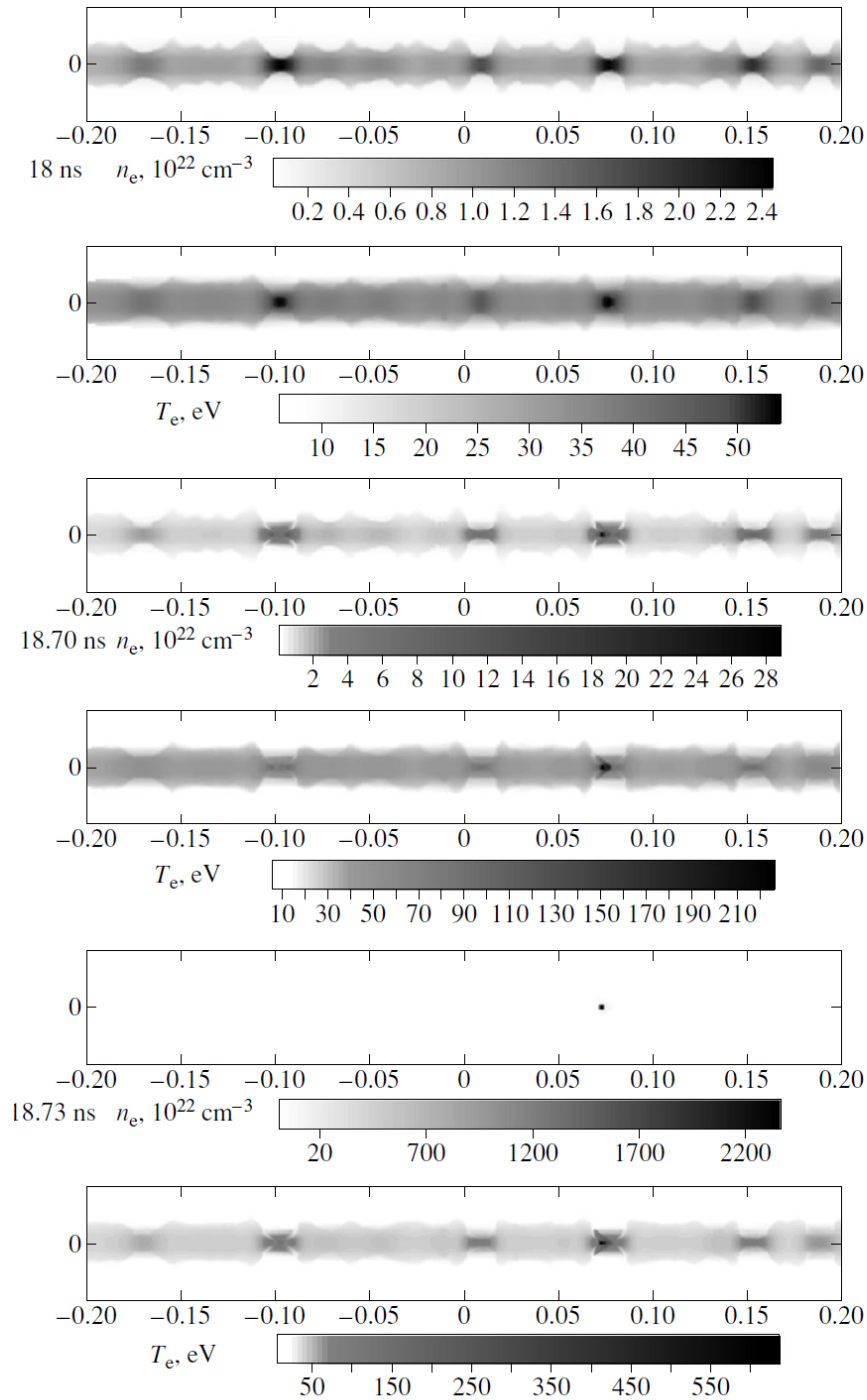
Warunki początkowe dla takiego przypadku różnią się od założonego rozkładu parabolicznego. Skok gęstości na granicy rdzeń korona może być nawet rzędu  $10^3$ . Poprawnie należałoby traktować te dwa obszary oddzielnie i stawiać na ich granicy warunek brzegowy. Dodatkowo sytuację komplikuje parowanie z rdzenia, które zwiększa gęstość obszarów sąsiadujących z granicą.



*Rys. 6.4 Rozkład i temperatury w końcowej fazie rozwoju niestabilności*

W istniejącej wersji kodu można było opisać taką sytuację tylko w sposób przybliżony, przyjmując cały obszar rdzenia i korony za jeden ośrodek i modyfikując odpowiednio wyznaczanie pochodnych ciśnienia i prędkości na skoku gęstości tak aby imitować warunek brzegowy. Przy wyznaczaniu gradientu ciśnienia punktów z korony nie uwzględnia się punktów rdzenia, a przy wyznaczaniu pochodnych prędkości punkty rdzenia nie „widzą” punktów korony. Skok gęstości zmieniano do 10 do 50. Nie było możliwości uwzględnienia tzw. „zimnego” startu (ewolucji od stanu metalicznego zimnego przewodnika) Symulowano eksplozję druczka tytanowego o początkowym promieniu  $r_0 = 24\mu\text{m}$  dla warunków eksperymentu przeprowadzonego na Uniwersytecie Cornell [79].

Z przedstawionych na Rys. 6.5 parametrów plazmy widać, że utworzona w koronie uderzeniowa fala kompresji dociera do rdzenia po około 12 ns. Następnie po około 2ns można zauważyć jednorodne nagrzewanie rdzenia spowodowane przewodnictwem elektronowym. Po 15 ns w koronie zaczynają rozwijać się niestabilności. Prowadzą one do powstania gorących miejsc (hot spot) w rdzeniu. W końcowym momencie promień pinch wynosi  $0.1\mu\text{m}$ , maksymalna gęstość elektronów  $10^{25}\text{ cm}^{-3}$ , temperatura elektronów 0.8 keV i maksymalny stopień jonizacji 18.5.



*Rys. 6.5 Rozkład parametrów plazmy dla końcowej fazy rozwoju niestabilności  $m=0$  dla eksplozji druczika tytanowego z rdzeniem*

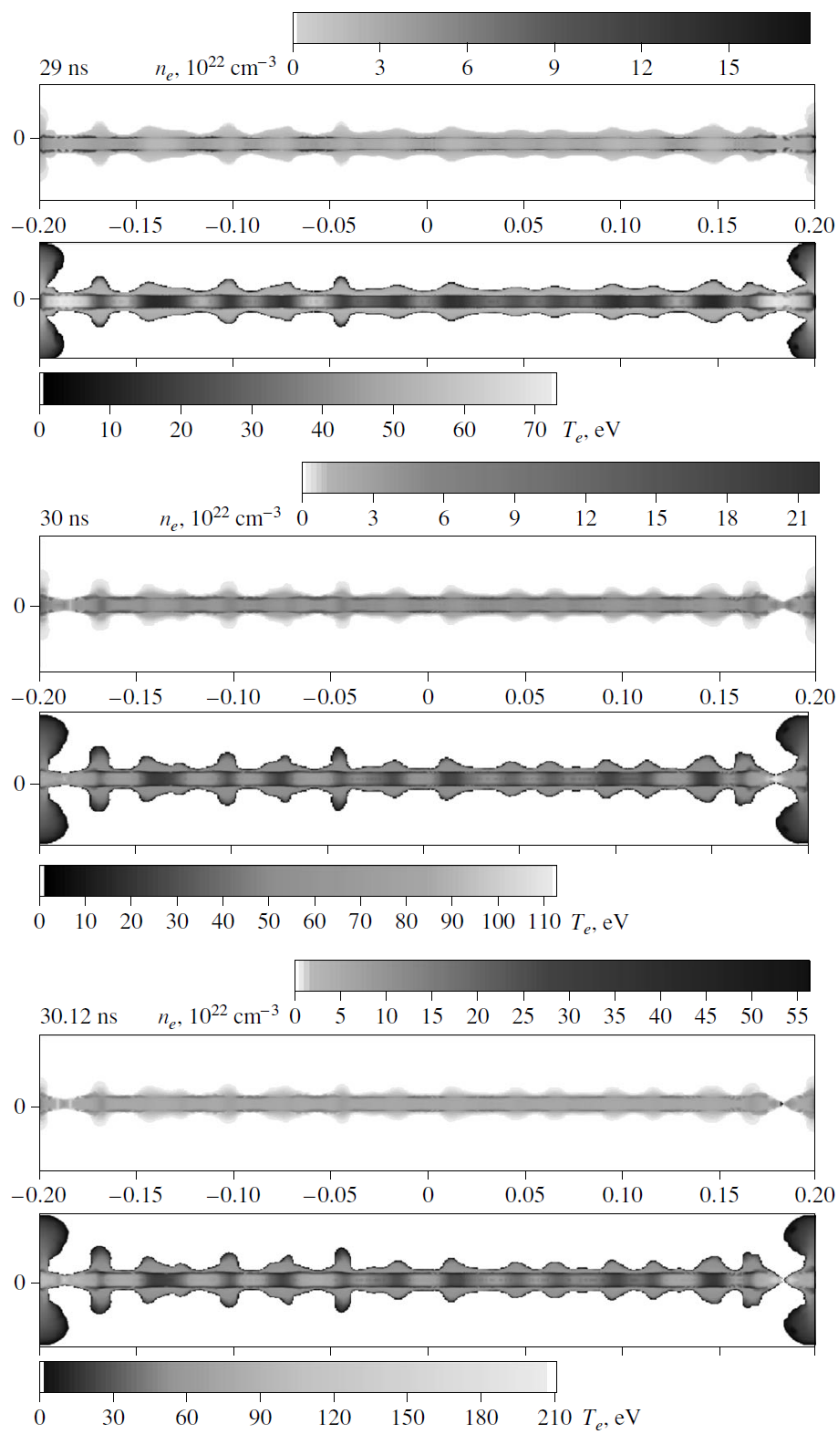
Już te uproszczone symulacje pokazały jak istotną rolę w ewolucji plazmy powstającej przy eksplozji drucików ze słabo przewodzących metali (np. wolframu) odgrywa gęsty rdzeń. Do prawidłowego opisu rdzenia konieczne jest uwzględnienie tzw. „zimnego” startu [80]. Gęsty rdzeń w początkowym stadium jest ciekłym, wrzącym metalem – mieszanina fazy ciekłej i gazowej. Opis i symulacje takiego ośrodka są dopiero w fazie początkowej ze względu na złożoność problemu. W opisie termodynamicznym takiego materiału mamy kilka obszarów: obszar równowagi ciec-gaz, obszary



przegrzanej cieczy i obszar przechłodzonych par. Obecnie przyjmuje się, że eksplozja przewodnika to gwałtowna ekspansja submikronowych kropelek metalu z jego parami powstałych na skutek grzania omowego. Dla opisu takiego ośrodka skorzystaliśmy ze stabilizowanego równania stanu w szerokim zakresie parametrów. Równanie stanu dla wolframu dostarczył G.V. Ivanenkov. Nadal traktujemy gęsty rdzeń i rzadką koronę jako jeden ośrodek. Do modelu włączone zostały pary metalu - atomy neutralne (neutrały). Obecność neutralów powoduje wzrost oporności. Ich opis uwzględniono poprzez włączenie do modelu przekroju czynnego na zderzenia elektronów z neutralami w przybliżeniu. Desjarlaisa [37]. Obliczenia startują z temperatury w rdzeniu 0.3 eV, powyżej której możemy przyjąć ustalenie się równowagi ciecz para. Obszar dwufazowy określony jest przez objętość par  $x$ . Średnią gęstość definiujemy jako  $\rho = (1 - x)\rho_l + x\rho_g$ . Dla temperatury jonowej  $T_i$  i ciśnienia  $p$  mniejszych od wartości krytycznych ( $T_c$  dla wolframu wynosi 0.85eV) uśrednione wartości wielkości w rdzeniu uśredniamy w następujący sposób  $\rho f = (1 - x)\rho_l f_l + x\rho_g f_g$ . Wyjątkiem jest oporność (przewodność), którą zgodnie z teorią transportu w mieszaninach ośrodków przewodzących i nieprzewodzących zaproponowaną w [81] przyjęta została w postaci  $\eta = \frac{\eta_l}{(Y + \sqrt{Y^2 + 0.5y})}$ , gdzie  $y = \frac{\eta_l}{\eta_g}$ ;  $Y = 0.25[y + (2 - 3x)(1 - y)]$ . W czasie odparowania rdzenia jego temperatura pozostaje stała. Wszystkie informacje o przejściu fazowym brane są z równania stanu. Początkowy promień korony przyjęto równy  $300 \mu m$  a promień rdzenia  $50 \mu m$ . Założono, że prąd narasta liniowo od wartości 0,5 kA do 250 kA a potem pozostaje stały.

Główna część prądu płynie w koronie. Do około 10 ns obserwujemy wolną ekspansję plazmy. Następnie zaczyna się kompresja i formowanie fali uderzeniowej dla 18 ns. Po około 18 ns dociera do rdzenia obszar podwyższonej temperatury elektronowej poprzedzający front fali uderzeniowej. Jak wiadomo w plazmie na skutek wysokiej przewodności elektronowej nie obserwuje się skoku temperatury elektronowej na froncie fali uderzeniowej. Po 20 ns rdzeń nagrzewa się do temperatury 1 eV (powyżej temperatury krytycznej) i jest już całkowicie zjonizowany. Nagrzewanie rdzenia w tej fazie spowodowane jest przewodnictwem elektronowym i radiacją. Po dojściu do rdzenia front kompresji gwałtownie wyhamowuje. Wzrasta gęstość, temperatura jonowa i jonizacja (dzięki obniżeniu potencjału jonizacji) skrajnych warstw rdzenia. Odbita od rdzenia fala uderzeniowa po dotarciu do powierzchni pinchu spowalnia kompresję. Po 25 ns następuje faza rozwoju niestabilności. Kolumna plazmowa podzielona jest na obszary kompresji i rozlotu, ale z wyraźnie widocznym gęstym rdzeniem. Promień rdzenia zmienia się niewiele. Parametry korony i rdzenia są ze sobą skorelowane.

Na Rys.6.6 a i b pokazano rozkład parametrów plazmy w końcowym momencie obliczeń dla  $t = 29.0, 30.0$  i  $30.12$  ns. Prędkość rozlotu w tym momencie wynosi  $1.5 \times 10^7$  cm/s. Temperatura w najgorętszych miejscach tzw. hot spotach jest rzędu 1 keV gęstość elektronowa  $n_e = 2 \times 10^{23}$  cm<sup>-3</sup>.

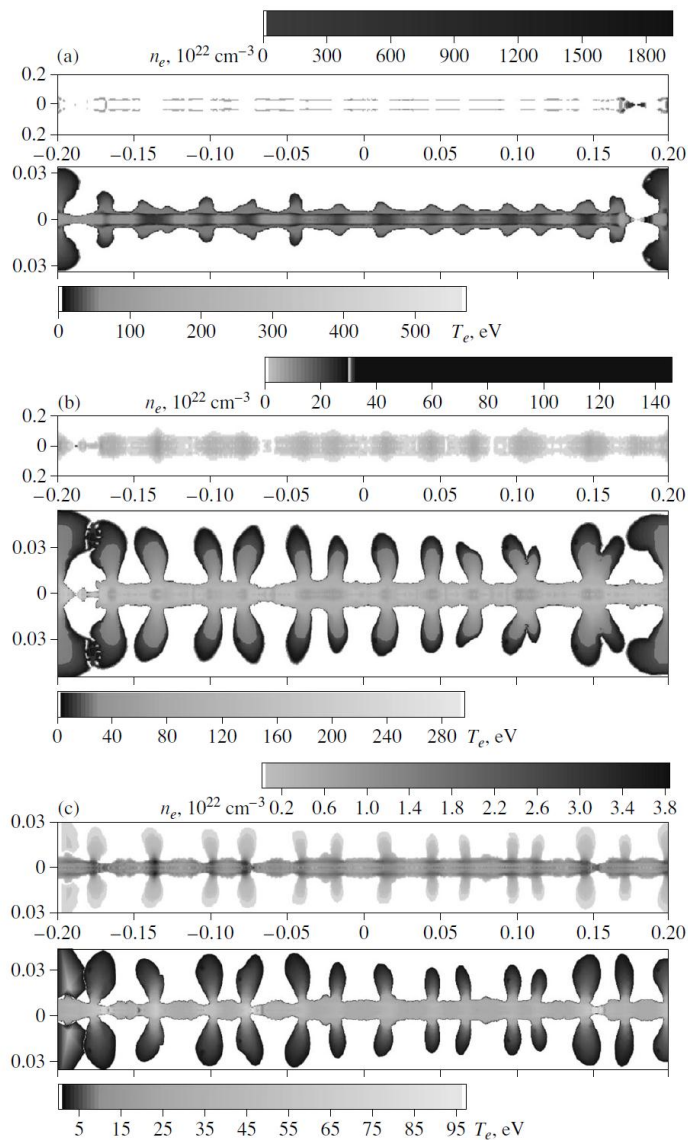


*Rys. 6.6 Rozkłady gęstości i temperatury dla przypadku z gęstym rdzeniem*

Ciekawe jest porównanie wyników dla różnych modeli fizycznych. Na następnym Rys. 6.7 przedstawione są rozkłady parametrów dla trzech modeli:

- a) model z parowaniem rdzenia
- b) wersja z całkowicie zjonizowanym rdzeniem  $T=2\text{eV} > T_c$ ,  $Z > 1$
- c) wersja bez rdzenia, z parabolicznym rozkładem gęstości.





*Rys. 6. 7 Końcowe rozkłady gęstości i temperatury elektronowej dla trzech modeli. Widać zgodność rozkładu gorących punktów.*

We wszystkich wersjach zakładamy ten sam prąd i przyjmujemy te same parametry siatki. Do około 15 ns nie ma dużych różnic w ewolucji granicy plazma-próżnia. Dla wersji b) po dojściu fali uderzeniowej do rdzenia obniżenie potencjału jonizacji jest mniejsze i nie obserwujemy przejścia dielektryk metal. Procesy ewolucji dla wariantu a) są mniej intensywne niż dla wariantu b). Plazma w przewężkach jest bardziej ściśliwa w wariacie b) i rozwój przewęzek jest bardziej zaawansowany niż w przypadku a). Plazma w gorących punktach dla wariantu b) jest zimniejsza niż w wariacie a). Wariant c) różni się do wariantu b) niższą temperaturą. Rozkład gorących punktów jest dla wszystkich 3 przypadków bardzo podobny.

## 6.2 Symulacje układu x-pinch

X-pinch jest bardzo ciekawym obiektem dla symulacji komputerowych ze względu na i uzyskiwane w nim rekordowe parametry plazmy (temperatura, jonizacja) jak i jego dwu a nawet trzywymiarowy charakter. Jego ideę zaprezentowano w rozdziale 3.2

W pracy [82] przedstawiono pierwsze próby symulacji ewolucji X-pinchu. Główną cechą tego zjawiska jest jego trójwymiarowość. W pierwszym przybliżeniu można aproksymować geometryczną konfigurację tego układu obszarem między dwoma odwróconymi, współosiowymi stożkami. Przy takim podejściu pole magnetyczne na wewnętrznej powierzchni drucika równa się zero. Aby tego uniknąć G. V. Ivanenkov zaproponował przenieść na wewnętrzną stronę rzeczywistą wartość pola azymutalnego  $B_\varphi$ .

Pozostałe składowe pola dla dwóch nici z prądem skrzyżowanych pod kątem  $2\alpha$  i opisywanych równaniem  $r = |z| \cdot tg(\alpha)$  można wyznaczyć składowe pola magnetycznego z równań magnetostatyki.

$$B_r = Ic^{-1} \sin\alpha \{ [0.25 \cdot r \cdot \sin 2\alpha (1 + \cos 2\vartheta - \sin 2\vartheta) (s_+^{-1} + s_-^{-1}) - z \cdot (\sin^2 \alpha \cos \vartheta + \cos^2 \alpha \sin \vartheta) (1 + \cos 2\vartheta - \sin 2\vartheta)] (s_-^{-1} - s_+^{-1}) \}$$

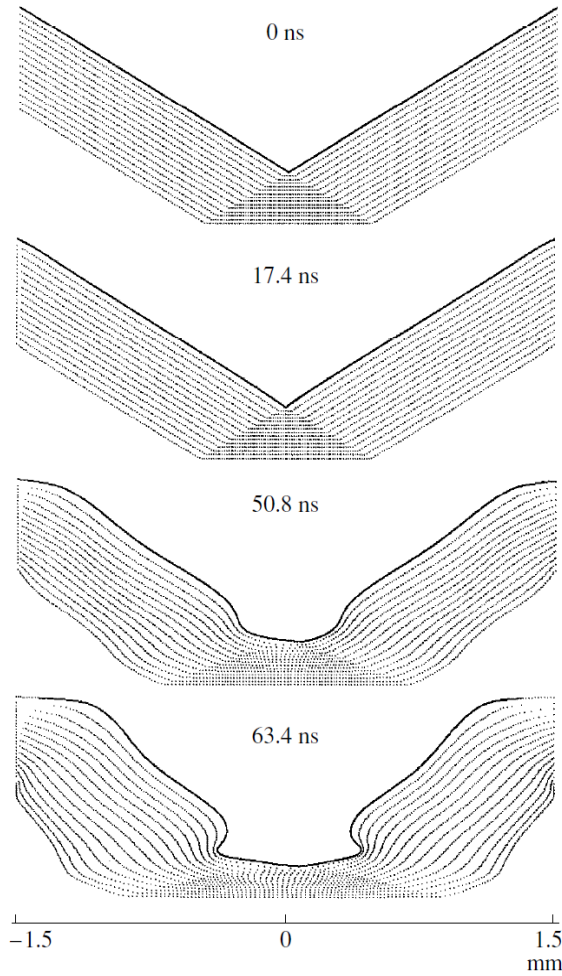
$$B_\varphi = Ic^{-1} [(r \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha \cos \vartheta) s_-^{-1} + (r \cos \alpha + z \cdot \sin \alpha \cos \vartheta) s_+^{-1}]$$

$$B_z = Ic^{-1} r \cdot \sin \alpha \cdot (s_-^{-1} - s_+^{-1}) \cdot \cos \vartheta$$

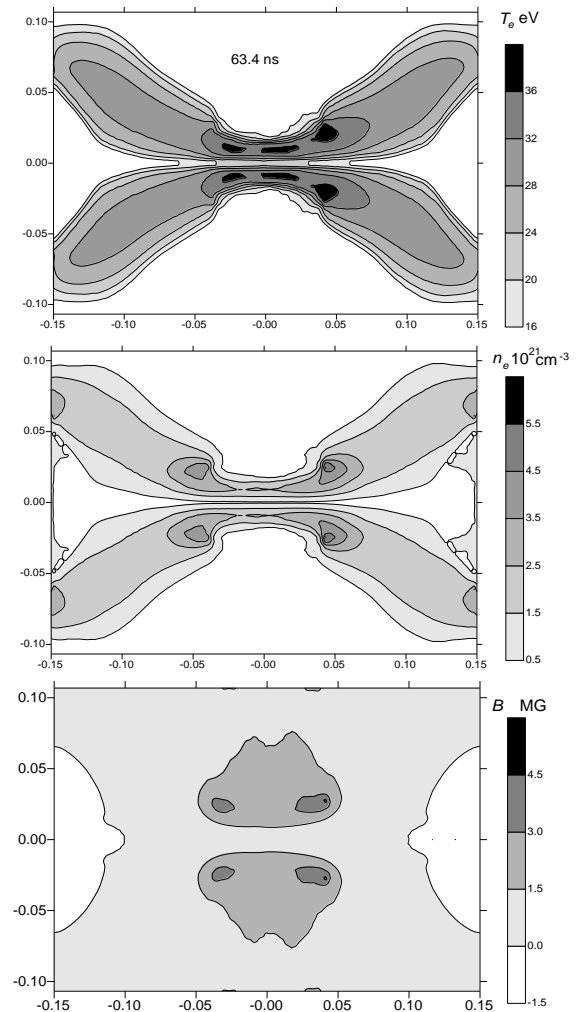
$$s_\mp = z^2 \sin^2 \alpha - r^2 (1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \vartheta) \mp rz \sin 2\alpha \cos \vartheta$$

Kąt  $\vartheta$  jest dowolnie wybranym kątem przekroju poprzecznego układu drutów. W naszym przypadku braliśmy tylko składową  $B_\varphi$ , która w tej postaci była przyjmowana jako warunek brzegowy dla pola na wewnętrznej granicy. Dzięki temu udało się uzyskać w symulacjach większą kompresję plazmy niż w pracy [83].

Na Rys. 6.8 przedstawiona jest ewolucja kształtu x-pinchu, przedstawiona za pomocą rozkładu punktów obliczeniowych, a na Rys. 6.9 pokazano rozkłady parametrów plazmy. Niestety nie widać na tych rysunkach obserwowanych w eksperymencie strug plazmy na osi. Ich demonstracja była jednym z celów naszych obliczeń. Obecnie uważam, że strugi na osi nie pochodzą, jak przypuszczaliśmy pierwotnie, z gęstej plazmy z obszaru skrzyżowania drucików, ale są efektem zderzenia się na osi układu zewnętrznych odparowujących warstw drucików. Stosowany w tej wersji kodu model numeryczny i fizyczny nie pozwalał na symulacje głębszej kompresji przewężki. Przerwanie obliczeń było powodowane problemami z równaniem transportu promieniowania.

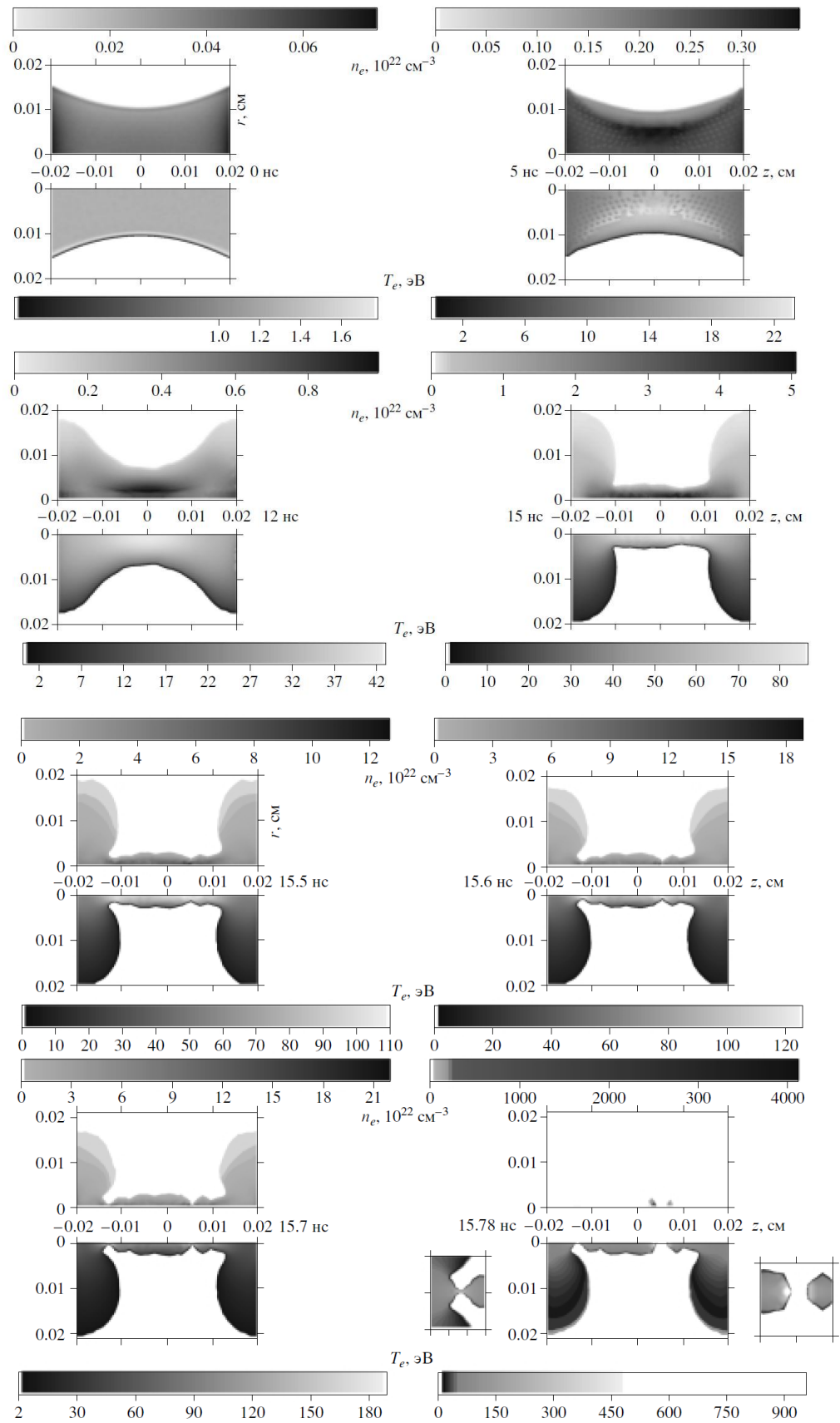


Rys. 6.8 Rozkład punktów siatki obliczeniowej ilustrujący zmianę formy X-pinchu



Rys. 6.9 Rozkłady przestrzenne temperatury elektronicznej, gęstości i pola magnetycznego w X-pinchu dla modelu stożkowego.

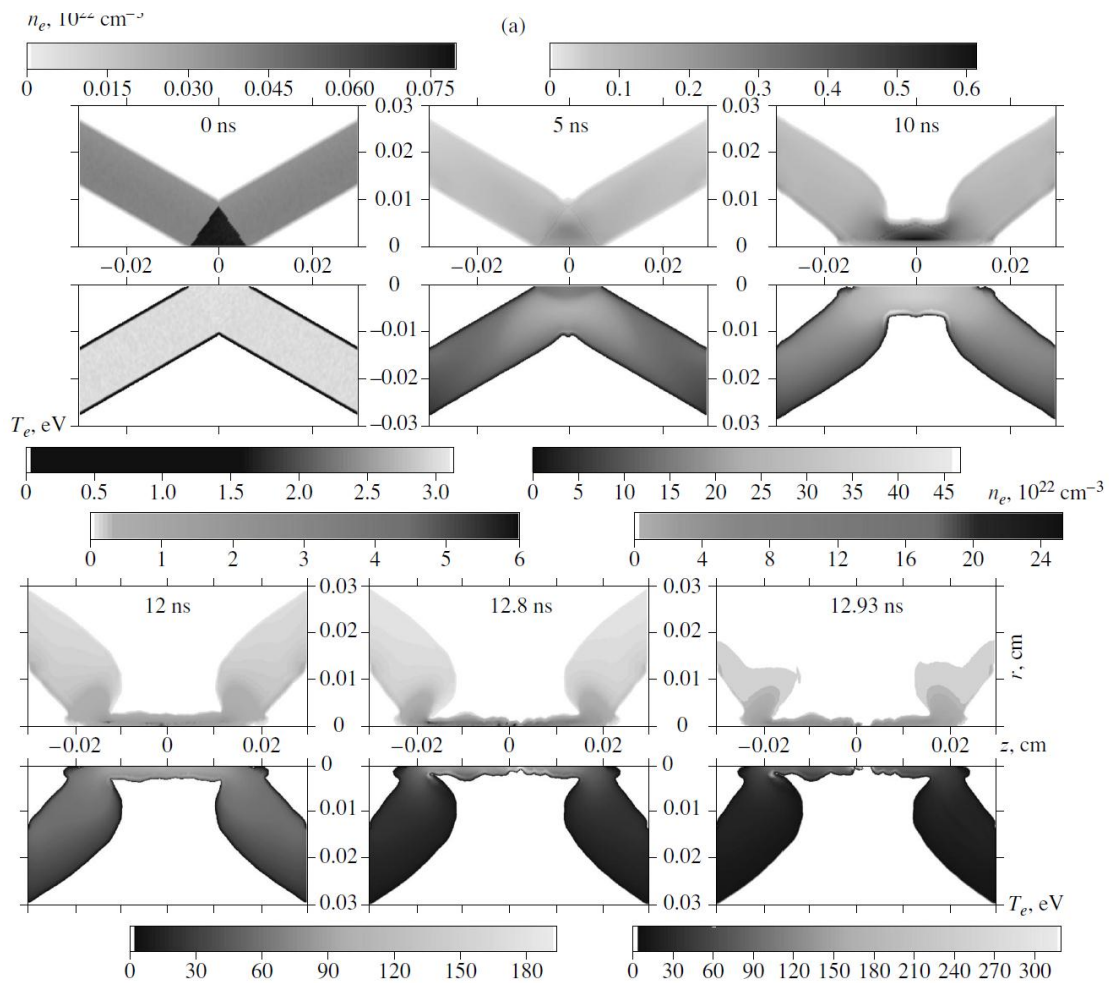
Ze względu na możliwości obliczeniowe oraz na istotną rolę plazmy o wysokich parametrach końcowych ograniczyłem się tylko do dwuwymiarowego modelowania obszaru przecięcia dwóch przewodników. Miejsce to nazywane jest obszarem „mini diody”. Pierwszym przybliżeniem jest opisanie „mini diody” jako paraboloidy [83]. Ewolucja takiego paraboloidalnego pinchu pokazana jest na Rys. 6.9. Przedstawione są na nim rozkłady koncentracji elektronicznej i temperatury. Lewy i prawy brzeg traktowane są jako nieprzenikliwe ścianki. W środku paraboloidy początkowy promień, przyjęty na podstawie eksperymentu, wynosi  $100 \mu m$  a na brzegach  $150 \mu m$ . Prąd narastał od 10 kA do 300 kA za 50 ns. Zadano początkowy profilowany rozkład gęstości po r paraboliczny, a wzdłuż z zależny w każdym przekroju od masy liniowej  $M(z) = \pi \rho_{max} a^2(z) / F(z)$  gdzie  $F(z) = 1 + (z/d)^2 [1 - 3(z/d)^2] / 8$ . gdzie d- połowa długości pinch. Jest to scałkowany po r rozkład gęstości w postaci  $\rho = \rho_{max} \{1 + f[r/a(z)]^2\} [(1 - f/2)F(z)]$ . Współczynnik f ma za zadanie zmniejszać napływ plazmy na elektrody. W obliczeniach przyjęto  $f = 0.7$ ,



Rys. 6.10 Ewolucja przecięcia dwóch molibdenowych  $10\ \mu\text{m}$  drucików w przybliżeniu parabolicznego kształtu kolumny plazmowej dla dwóch różnych czasów.

Na Rys. 6.10 pokazana jest ewolucja mini-diody, aż do momentu przerwania kolumny plazmowej Rys. 6.10 (dolny). Warstwa prądowa schodzi równomiernie do osi przez około 12 ns. Potem następuje wypływ plazmy w kierunku elektrod, co ułatwia dalszą kompresję. Maksymalna temperatura osiąga 100 eV a koncentracja elektronów  $5 \times 10^{22} \text{cm}^{-3}$ . Ewolucja przewęzek lokalizuje się - tworzą się gorące punkty. Nie są one zlokalizowane symetrycznie. Ich rozwój kończy się przerwaniem sznura plazmowego. W początkowej wolnej fazie dominujące jest nagrzewanie omowe. W końcowej fazie istotną rolę zaczyna odgrywać promieniowanie - szczególnie w przezroczystych optycznie zewnętrznej części i jego udział wyrównuje się z nagrzewaniem - temperatura zmienia się niewiele. Maksymalna moc wypromieniowania osiąga wartość 25 GW. Promieniuje głównie obszar najbardziej rozwiniętej przewężki

X-pinch można opisać jako połączenie dwóch obszarów stożkowych stykających się wierzchołkami. Taki opis pozwala uwzględnić wypływ plazmy z obszaru „mini diody”. Kąt rozwarcia stożka przyjmowano równy  $\pi/3$ , promień w najwęższym miejscu  $100 \mu\text{m}$  a jego szerokość  $130 \mu\text{m}$ . Obliczenia były prowadzone na siatce 21 na 165. Wyniki symulacji dla tego wariantu pokazano na Rys. 6.11.

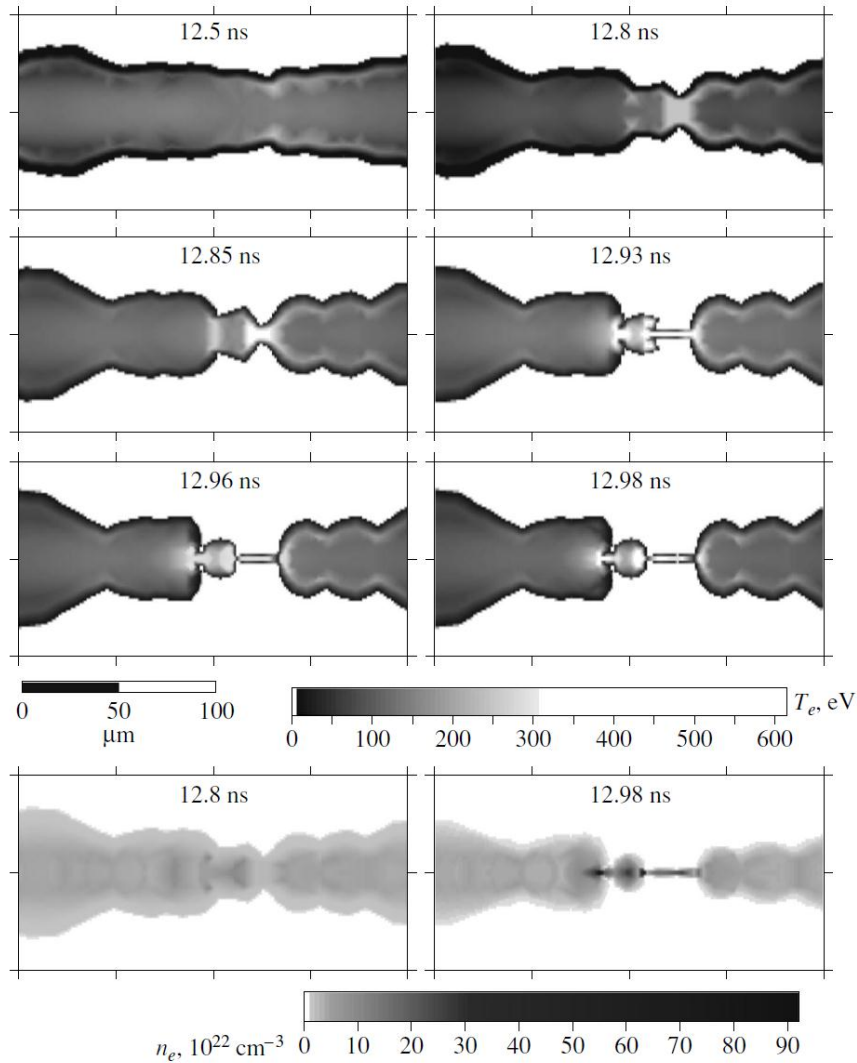


Rys. 6.11. Ewolucja rozkładów temperatur dla przybliżenia stożkowego

Widać na nim, że w początkowej fazie zaburzony jest tylko obszar w okolicach minimalnego promienia. Po 10 ns do wewnętrznej powierzchni stożka dochodzi front grzania i zaczyna się jej rozszerzanie. Po 12 ns zauważyć można ruch plazmy przy osi w kierunku obu końców czego nie dało się uwzględnić w poprzednim wariacie. Obszar wokół minimalnego promienia ulega wydłużeniu. Naruszenie symetrii katoda-anoda obserwujemy podobnie jak w poprzednim przypadku po około 12 ns Rys. 6.12. Spowodowane jest to osiowymi przepływami plazmy. Jedyną różnicą w stosunku do poprzedniego przypadku jest powstanie tylko jednego gorącego punktu. W powiększeniu widać że gorący punkt ma bardziej złożoną strukturę. Temperatura elektronów w tym punkcie, w końcowej fazie wynosi 490 eV a gęstość elektronowa jest rzędu  $10^{24}\text{cm}^{-3}$ . Plazma jest grzana głównie omowo i poprzez przewodnictwo elektronowe. Zmieniany był czas narastania prądu do wartości maksymalnej 250 kA - 40, 45 i 50 ns. Początek rozlotu (eksplozji) gorącego punktu był obserwowany odpowiednio dla czasów 18.2 ns, 20.4 ns i 21.4, dla prądów 114 kA, 113 kA i 107 kA. Średnie parametry plazmy (temperatura, gęstość, stopień jonizacji) zgadzały się z obserwowanymi w eksperymencie. Eksplozję gorącego punktu można wyjaśnić przyjmując, że plazma w gorącym punkcie jest grzana głównie opornościowo. Charakterystyczny czas wypływu  $t_{out} = a/c_s$  (a minimalny promień przewężki - rozmiar gorącego punktu) jest mniejszy od charakterystycznego czasu wyrównywania temperatur  $\tau_{ei}$ . Temperatury jonowe i elektronowe w tym obszarze dość silnie się różnią.

Przewodnictwo elektronowe nagrzewa plazmę po obu stronach od miejsca minimalnego promienia. Przewężka jest silnie zaciskana. Za frontem grzania elektronowego narasta ciśnienie (do 10 Gb) i tworzą się fale uderzeniowe rozchodzące się w kierunku podłużnym. Wyprzedzenie przez te fale uderzeniowe frontu przewodności elektronowej wygląda jak eksplozja. Czas życia w plazmy w takim obszarze nie przewyższa czasu wyrównywania temperatur  $\tau_{ei}$  (kilkadziesiąt pikosekund). Temperatura radiacyjna zbliża się do temperatury elektronowej. Liniowa koncentracja w przewężce spada na skutek wypływu, co prowadzi w ostateczności w tym modelu do przerwania sznura plazmowego. Podobny efekt jest obserwowany też w innych kodach lagranżowskich. Spowodowane jest to założeniem, iż prąd jest stały i płynie cały przez obszar przewężki, mimo wzrastającej indukcyjności. Modele transportu, równanie stanu i opis jonizacji w tym wariacie kodu nie są poprawne dla ekstremalnych parametrów plazmy (częściowej degeneracji elektronów)

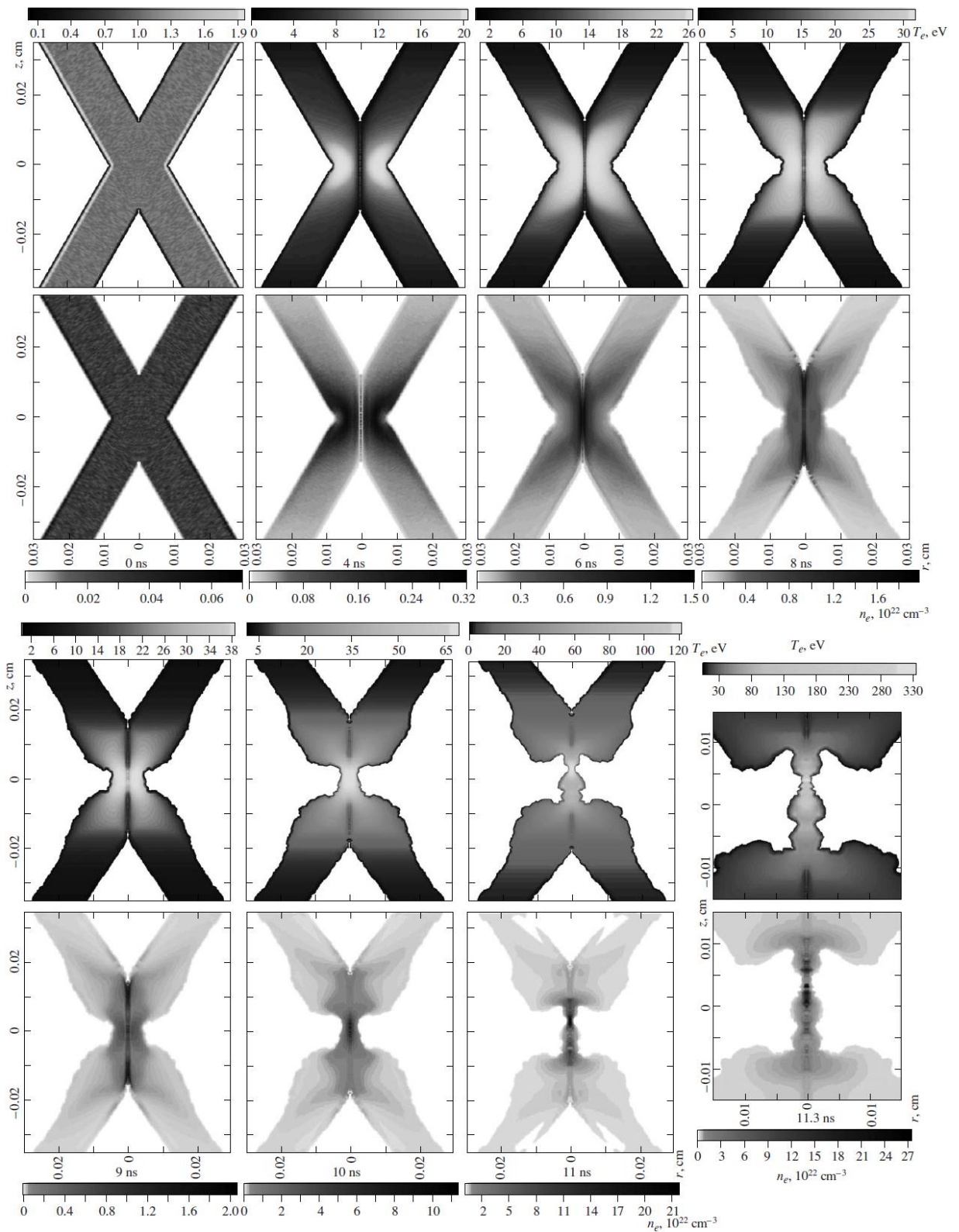
Wartości maksymalne osiągnane były w końcowym momencie, gdy siatka numeryczna była bardzo rozrzedzona (w tym wariacie kodu) i niestety są obciążone dużym błędem. Te problemy były to impulsem do dalszego rozwoju kodu



*Rys. 6.12 Rozkłady gęstości i temperatury dla molibdenowego X-pinchu w przybliżeniu stożkowym dla końcowej fazy*

Rezultaty obliczeń prowadzonych za pomocą udoskonalonej wersji kodu były zaprezentowane w pracy [84]. W nowej wersji uwzględniono warunek brzegowy dla strumienia pędu na brzegu, poprawiono współczynniki transportu oraz udoskonalono algorytm iteracji dla stacjonarnego równania transportu promieniowania. Symulacje były prowadzone dla wariantu parabolicznego oraz stożkowego dla większej ilości punktów. Dla modelu stożkowego założono jednorodny rozkład gęstości - pominięto podział kolumny na rzadką koronę i gęsty rdzeń. Prąd zmieniał się w czasie  $I(t) = 250 \sin(\pi t/t_0)$  kA, gdzie  $t_0 = 80$  ns, temperaturę początkową przyjęto równą 1 eV.



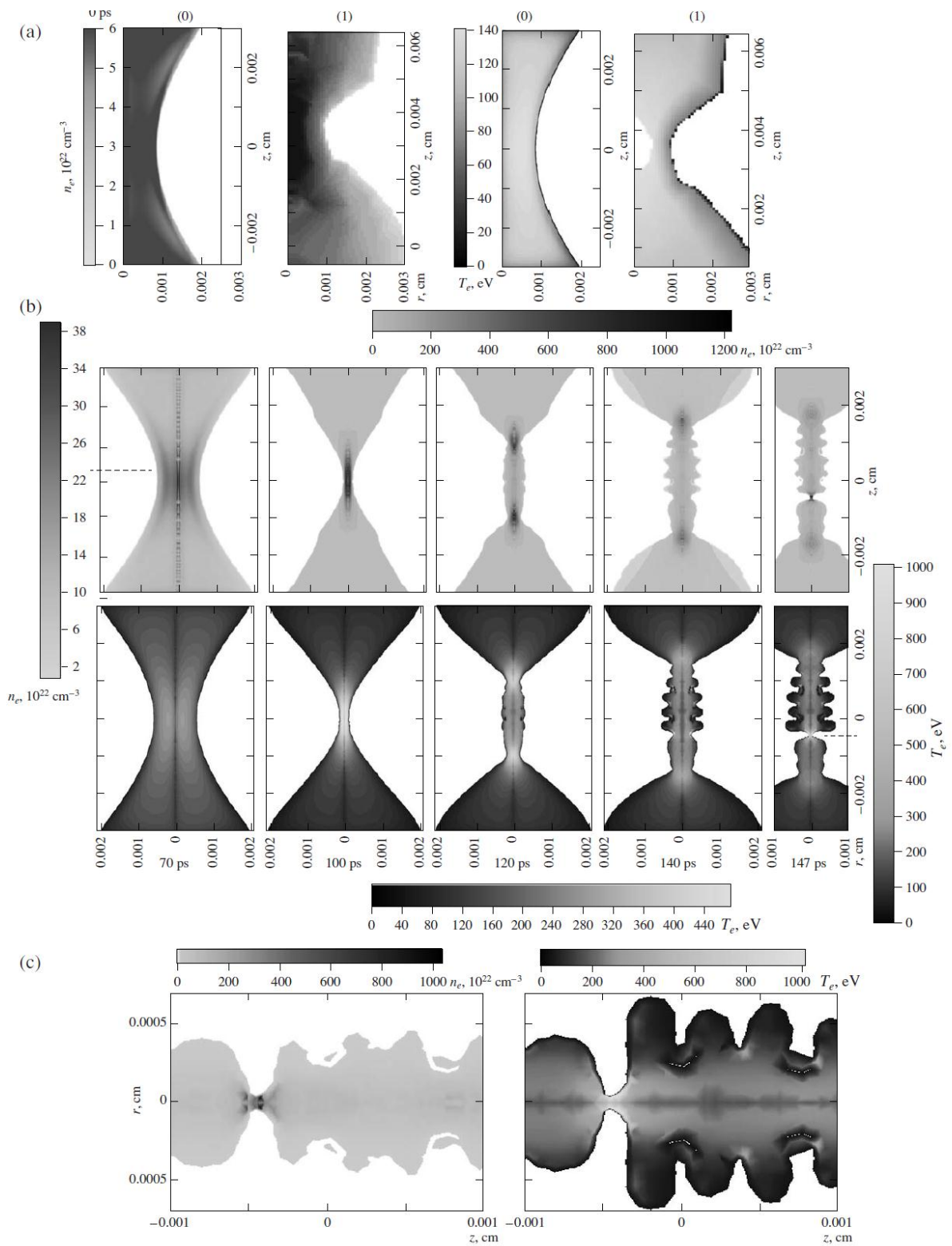


Rys. 6. 13 Symulacja implozji x-pincha dla jednorodnego rozkładu początkowej gęstości i modelu stożkowego dla gęstszej siatki; powstanie mini-diody i ewolucja przewężki i gorącego punktu



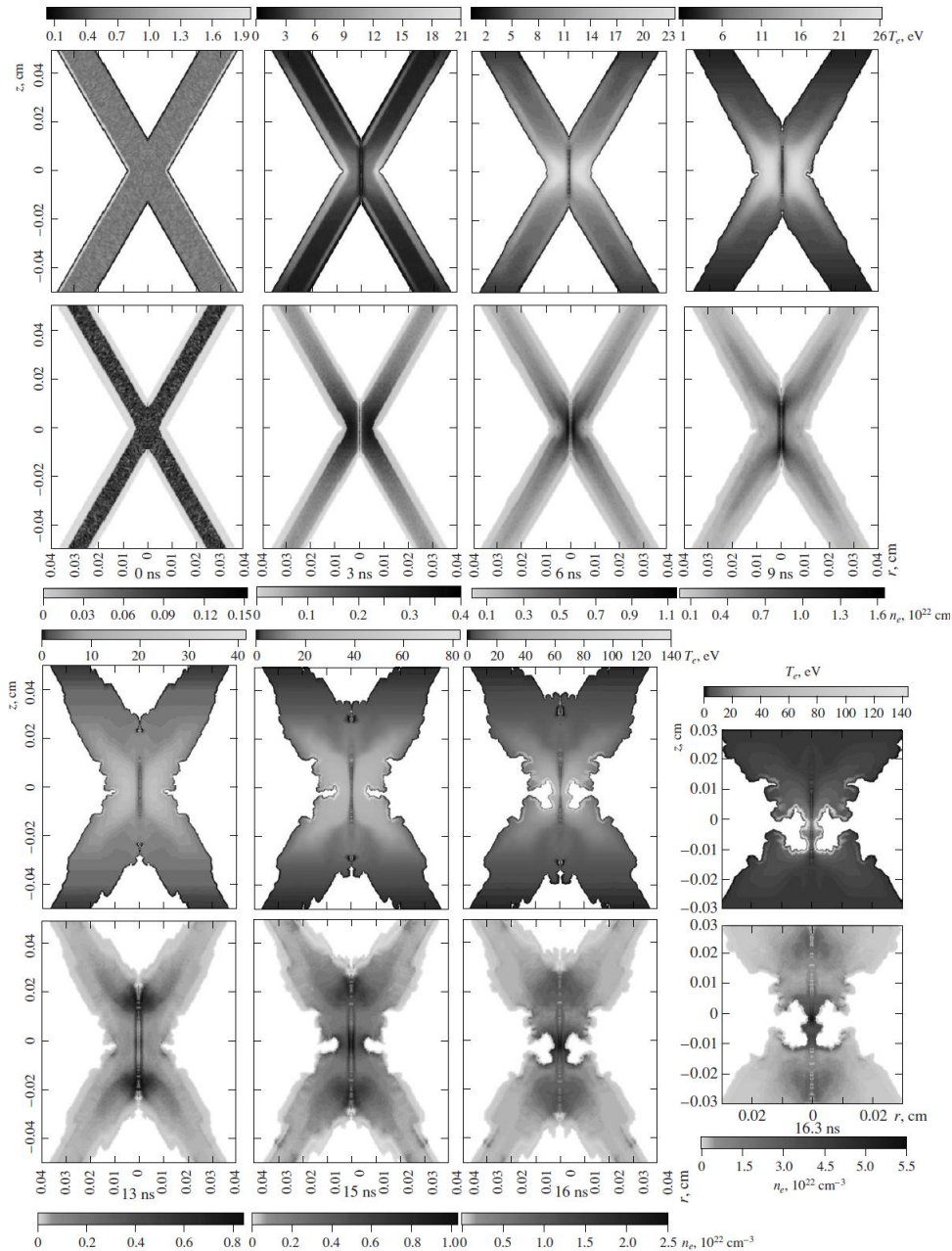
Na Rys. 6.13 przedstawiono rozkłady temperatur i gęstości dla różnych chwil czasu od 0 do 11 ns. W trakcie ewolucji prąd i pole magnetyczne dyfundują w głąb plazmy. W początkowej fazie (do 8 ns) zaburzona jest tylko centralna część w okolicach przecięcia drucików. Zakrzywiony front kompresji nagrzewa plazmę do około 100 eV a gęstość elektronowa osiąga wartość  $10^{23}\text{cm}^{-3}$ . Front nagrzewania rozchodzi się od centrum w kierunku elektrod. Po 9 ns przewężenie zaczyna się rozszerzać i formuje się charakterystyczna „mini dioda”. Po 11 ns zaczynają rozwijać się na kolumnie mini diody dwa przewężenia, których dalsza ewolucja zachodzi na skali subnanosekundowej. Plazma wypływając z tych przewężeń powoduje gwałtowną ekspansję sąsiadujących z nimi obszarów. Model był jeszcze niedoskonały i dopuszczał przerwanie pinchu co kończyło obliczenia. Minimalny promień w tym przypadku był równy  $3.8\ \mu\text{m}$ , maksymalne temperatury  $T_e = 390\ \text{eV}$ ,  $T_i = 430\ \text{eV}$ ,  $T_r = 160\ \text{eV}$ , gęstość elektronowa  $n_e = 10^{23}\text{cm}^{-3}$  i odpowiadający jej stopień jonizacji  $Z=15$  dla czasu 11.8 ns. Parametry dla tego przypadku nie są wysokie i świadczą o tym, że plazma nie osiągnęła punktu stagnacji – równowagi. Te rezultaty zostały wykorzystane jako początkowe do dalszych symulacji. Przyjęto profil paraboliczny o minimalnym promieniu równym promieniowi przewężki  $10\ \mu\text{m}$  i długości większej od położenia frontu fali uderzeniowej, gęstości jonowej  $n_i = 3 \times 10^{21}\text{cm}^{-3}$ ,  $Z=15$ ,  $T_e = T_i = 150\text{eV}$ . Celem tych obliczeń było pokazanie kaskadowego rozwoju przewężeń wraz z malejącą lokalną krzywizną. Przyjmując prędkość kolapsu równą prędkości dźwięku  $c_s = (ZT_e/m_i)^{1/2} \approx 6 \cdot 10^6\ \text{cm/s}$ , która w warunkach równowagi jest bliska prędkości Alfvena) widać, że czas implozji jest krótszy od 1ns. Początkowy promień pinchu jest rzędu  $c_s \cdot \tau_{ei}$  gdzie  $\tau_{ei}$  - czas wyrównywania temperatur między elektronami a jonami. Elektrony nie są w stanie przejąć ciepła od jonów na skutek grzania falą uderzeniową co prowadzi do niejednorodnego rozkładu temperatury elektronowej. Elektrony przed frontem fali uderzeniowej grzane są przez promieniowanie. Relaksacja temperatury elektronowej za frontem fali uderzeniowej jest 1/z razy wolniejsza niż temperatury jonowej.

Ewolucja paraboloidalnej, kolumny plazmowej pokazana jest na Rys. 6.14. Przez pierwsze 30ps obserwujemy adaptację parametrów plazmy do bardziej realnych warunków. Front fali uderzeniowej dociera do osi po około 100ps. Po 110ps rejestrowane są maksymalne parametry plazmy. Następnie na kolumnie plazmowej po 120 ps zaczynają rozwijać się niestabilności. Rozwój tych niestabilności ma charakter kaskady. Powstają one na początkowej niestabilności – mini diodzie, którą przedstawiamy jako paraboloidalną kolumnę. Przy 147ps obserwuje się silny wzrost intensywności promieniowania. Trwa on około 10ps. Związany jest z rozwojem niestabilności i powstaniem gorących punktów. Ich struktura pokazana jest szczegółowa na rys 6.15c. Minimalny promień przewężki przed zatrzymaniem obliczeń na skutek deficytu cząstek wynosi  $11\ \mu\text{m}$  i jest rzędu zasięgu Plancka dla fotonów. Temperatura radiacyjna jest niższa od temperatury elektronów.



Rys 6.14 Ewolucja x-pincha w przybliżeniu parabolicznym a) warunki początkowe dla symulacji b) symulacja powstania gorącego punktu c) szczegółowa struktura gorącego punktu

Przeliczono ten przypadek dla różnych danych początkowych i w końcowym momencie uzyskano wyniki niewiele różniące się jakościowo od siebie. Niestety w najbardziej interesującej końcowej fazie wyniki były już nie fizyczne ze względu na deficyt punktów obszarze obliczeń oraz braki w modelu fizycznym. Konieczne okazało się uwzględnienie niestacjonarnego modelu transportu promieniowania. W opisie kinetyki jonizacji dla gęstej plazmy należałoby uwzględnić obniżenie potencjału jonizacji i wpływ degeneracji elektronów. W modelu numerycznym konieczne jest uzupełnianie punktów w pustych obszarach.



Rys. 6.15 Ewolucja X-pinch w modelu stożkowy dla niejednorodnego rozkładu gęstości

Przeprowadzono również obliczenia dla przybliżenia stożkowego z niejednorodnym rozkładem gęstości (Rys.6.15). Przyjęto skok gęstości na granicy korona

rdzeń równy 30. Dla tego przypadku obserwujemy nagrzewanie przez gorącą koronę gęstego i zimnego rdzenia. W koronie, w której płynie większość prądu, formuje się fala uderzeniowa. Dochodzi ona do granicy z rdzeniem po 3ns. Po jej odbiciu następuje rozłot korony. Jest on silniejszy w okolicach przecięcia drucików. Po 13ns sekundach obserwuje się ekspansję prawie całej plazmy a tylko w centrum tworzy się wnęka. Dla przypadku z rdzeniem faza kompresji trwa dłużej niż dla jednorodnego rozkładu plazmy

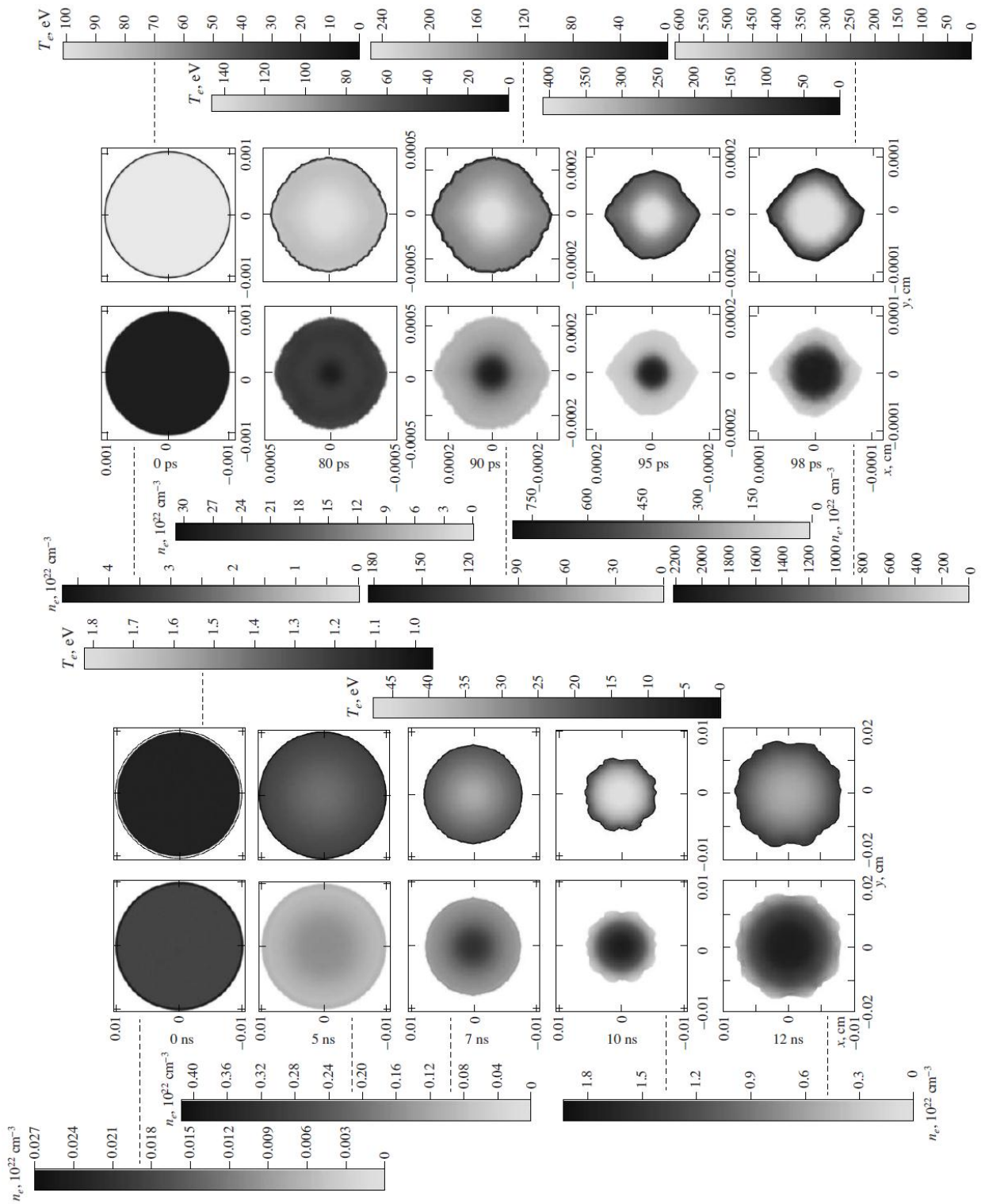
Zderzające się na osi rozlatujące zewnętrzne warstwy tworzą coś w rodzaju strugi. Obliczenia musiały być przerwane w tym przypadku ze względu na sklejanie się zewnętrznych, rozlatujących warstw plazmy.

Jest oczywiste, że zjawisko x-pinchu ma charakter 3 wymiarowy. Próbą zbadania wpływu niejednorodności kątowych była symulacja w geometrii x-y przekroju x-pinchu. Jako warunki początkowe przyjęto rozkłady dla fazy pikosekundowej z poprzednich obliczeń. Efekty wypływu plazmy uwzględniono w uproszczony sposób zaproponowany w pracy [35]. Charakterystyczny dla modelu czas wypływu plazmy przyjęto równy:

$$\tau_{out} = 2\sqrt{a_{min}a_{max}}/3c_s$$

gdzie  $a_{min}$ ,  $a_{max}$  minimalny i maksymalny promień przewężki. Implozja pokazana na Rys.6.16 bardzo silnie zależy od początkowego rozkładu gęstości. Dla rozkładu parabolicznego gęstości fala uderzeniowa formuje się szybciej i jest silniejsza niż w przypadku rozkładu jednorodnego. Gdy fala uderzeniowa schodzi do osi to zewnętrzne warstwy ekspandują. Przez większość czasu grzanie elektronów z frontem fali jest względnie małe i wzrasta istotnie dopiero po dojściu fali do osi. Czas kompresji i parametry plazmy zgadzają się z uzyskanymi w geometrii r-z do momentu maksimum kompresji. Przy ekspansji plazmy różnice są już znaczne co może być spowodowane uproszczonym modelem wypływu plazmy.

Ostatnia, pełna wersja modelu ze złożonym modelem fizycznym opisu gęstej plazmy i udoskonalonym algorytmem numerycznym była użyta do symulacji końcowej fazy ewolucji obszaru przecięcia drucików w X-pinchu. Celem obliczeń było pokazanie zatrzymania kompresji (stagnację) i dalszy rozwój niestabilności dla bardzo gęstej kolumny plazmowej. Dla tej fazy ewolucji, dla poprzednich wersji kodu, z powodu deficytu cząstek nie można było kontynuować obliczeń.

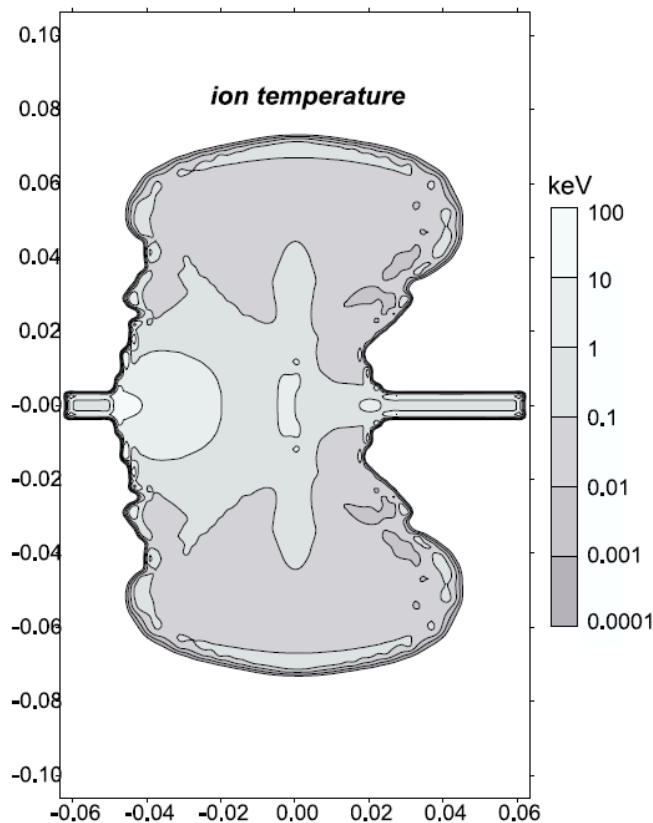


Rys. 6.16 Kompresja X-pincha w geometrii x-y, góra – modelowanie dla skali nanosekundowej; dół dla końcowej skali pikosekundowej

### 6.3 Symulacja fali spalania termojądrowego w z-pinchu

Obok modelowania ewolucji x-pinchu zajmowałem się też innymi zadaniami związanymi z układami typu z-pinch. J. Linhart zaproponował nam zbadanie możliwości zapłonu i rozprzestrzenia się fali spalania termojądrowego w kolumnie deuteru ściśniętego do gęstości  $10^{26}\text{cm}^{-3}$  (1000 razy gęstość ciała stałego) i utrzymywanego polem magnetycznym. Zapłon inicjowany jest w przewężce niestabilności typu  $m=0$ . W jej centrum znajduje się mieszanina DT nagrzana do temperatury 10 keV o parabolicznym rozkładzie gęstości  $\rho(r) = \rho_0(1 - r/R)$  gdzie  $\rho_0=200\text{g/cm}^3$ . Pozostała część plazmy ma temperaturę  $T_e = T_i = 0.5\text{ keV}$ . Utrzymujący tę plazmę prąd wynosi 20.6 MA. Spełnione jest kryterium Lawsona zapłonu  $\rho r > 1\text{g/cm}^2$ . Zawartość trytu spada wraz z oddalaniem się od centrum przewężki, aż do zera na jej krańcach. Symulowano dwa przypadki – cylindryczny i stożkowy z kątem u wierzchołka równym  $20^\circ$  [86].

Model uwzględniał kinetykę reakcji termojądrowych i nielokalny transport cząstek alfa w przybliżeniu dyfuzyjnym w polu magnetycznym w oparciu o prace [87]. Mimo niedoskonałości modelu numerycznego udało się uzyskać ciekawy wynik.



Rys. 6.17 Rozkład temperatury jonowej dla przypadku cylindrycznego

Jak widać z Rys. 6.17 w układzie rozchodzi się fala spalania termojądrowego, ale tylko w jedną stronę. Niesymetryczna generacja pola magnetycznego spowodowana nierównoległością gradientów temperatury elektronowej i koncentracji (bateria Biermanna) powoduje wzmocnienie pola po prawej stronie i jego osłabienie po lewej. Prowadzi to do osłabienia przewodności elektronowej i współczynnika dyfuzji alfa

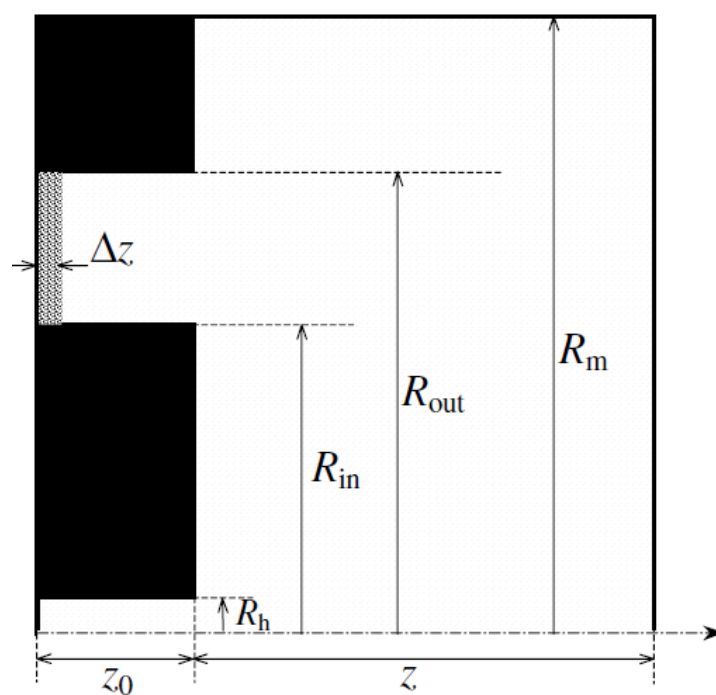


cząstek w obszarze silnego pola i w konsekwencji do zaniku fali spalania. W przypadku stożkowym obserwuje rozchodzenie się fali spalania w obie strony. Prędkość fali spalania w przypadku cylindryczny wynosi  $1.8 \times 10^8 \text{ cm/s}$ , a dla wariantu stożkowego  $3.0 \times 10^8 \text{ cm/s}$ .

#### 6.4 Modelowanie plazmy w układzie Plasma Focus

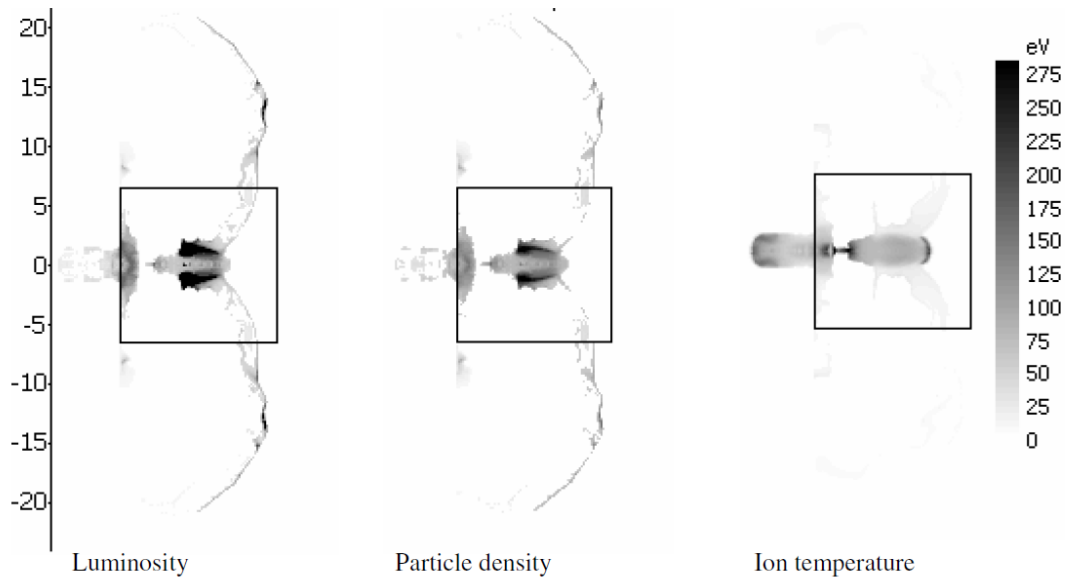
Drugim kierunkiem moich prac było opracowanie kodu do symulacji dynamiki plazmy w układzie Plasma Focus. Jako obiekt symulacji wybrałem eksplloatowane w naszym w naszym Instytucie urządzenie PF-1000. W pierwszy podejściu przyjąłem uproszczony model późnego startu. Pomiąłem fazę akceleracji i założyłem, że ukształtowana warstwa prądowa startuje z zadaniem rozkładem gęstości i prędkości w pobliżu końca elektrod [88].

Warunki startu pokazane są na Rys. 6.18

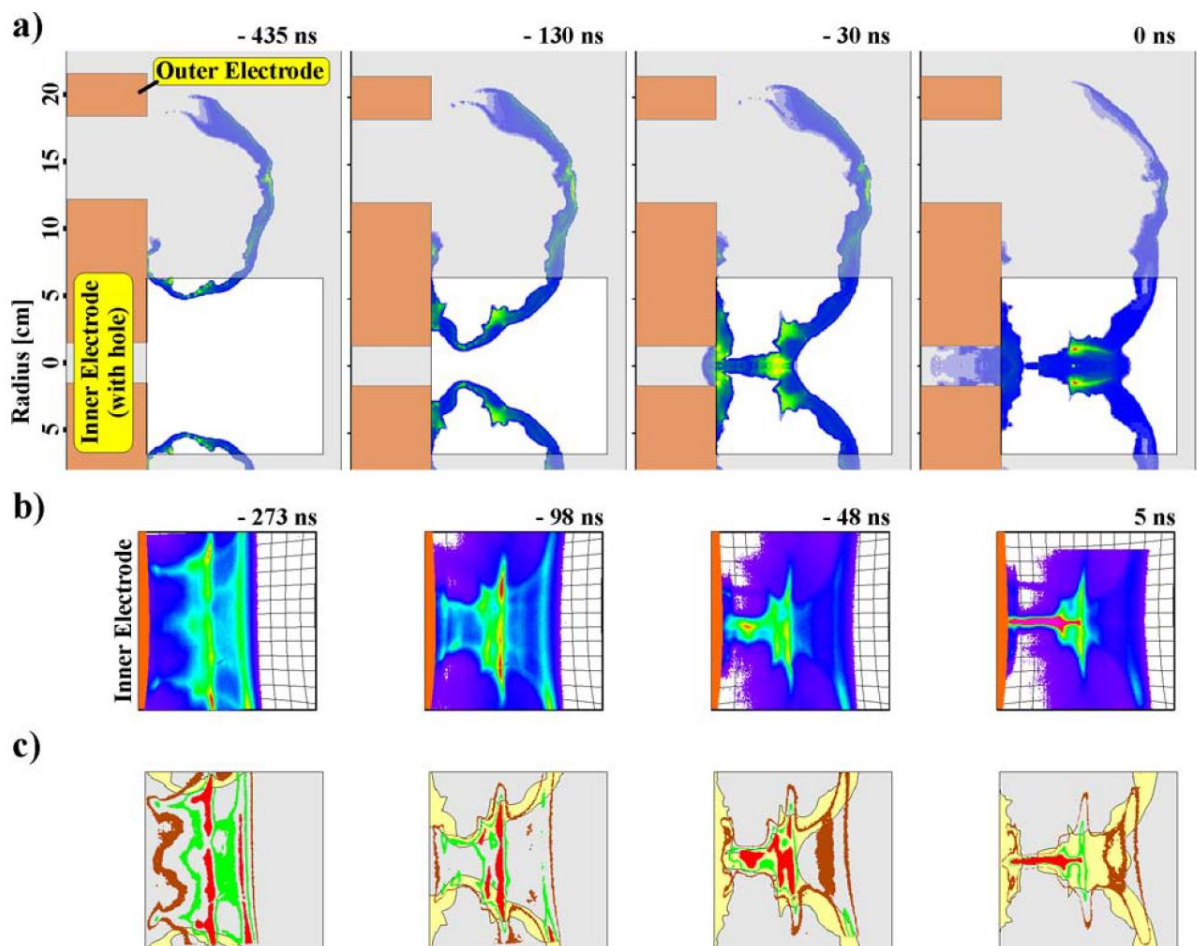


Rys. 6.18 Warunki początkowe dla obliczeń  $R_{in} = 12 \text{ cm}$   $R_{out} = 18 \text{ cm}$   $R_h = 1.5 \text{ cm}$  promień dziury w centralnej elektrodzie,  $R_m = 24 \text{ cm}$   $z = 18 \text{ cm}$   $z_0 = 6 \text{ cm}$   $\Delta z = 0.9 \text{ cm}$  (szerokość warstwy prądowej)

Przyjąłem, że temperatura elektronowa i jonowa są równe w momencie startu 5eV. Prąd ma wartość maksymalną wziętą z eksperymentu 1.7 MA. Potem prąd wyznaczany jest z warunku zachowania strumienia magnetycznego  $L \cdot I = \text{const}$ . Ciśnienie gazu (deuter) wynosi 3 Torr a jego początkową jonizację przyjąłem równą 0.1 %



Rys. 6.19 Przestrzenne rozkłady świecide, gęstości i temperatury jonowej dla momentu maksymalnej kompresji



Rys. 6.20 Porównanie struktury warstwy prądowej a) symulacja MHD rozkłady intensywności promieniowania hamowania na podstawie wyliczonych  $T_e$  i  $n_e$ , b) zdjęcia z szybkiej 4 kadrowej kamery QUATRO c) nałożone profile eksperymentalne i komputerowe [89]

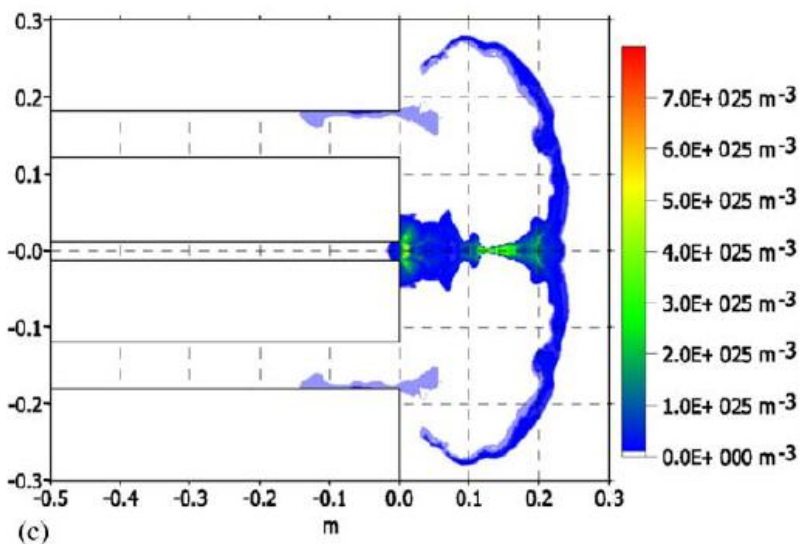
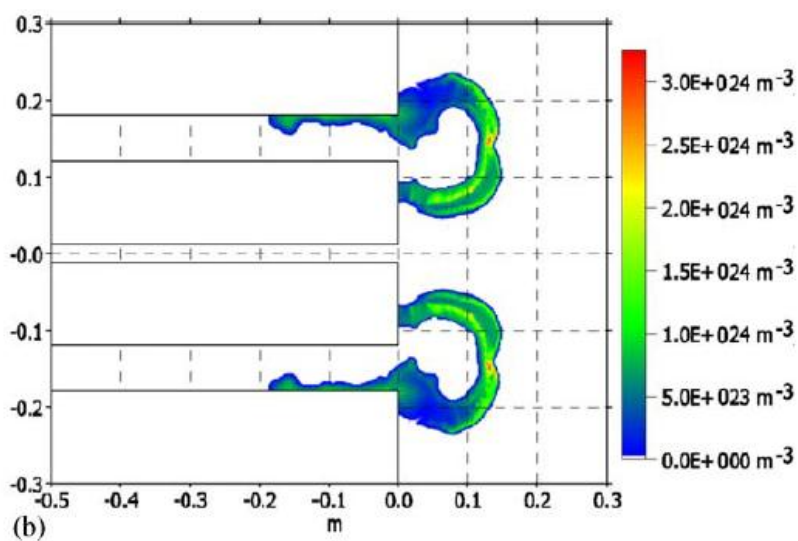
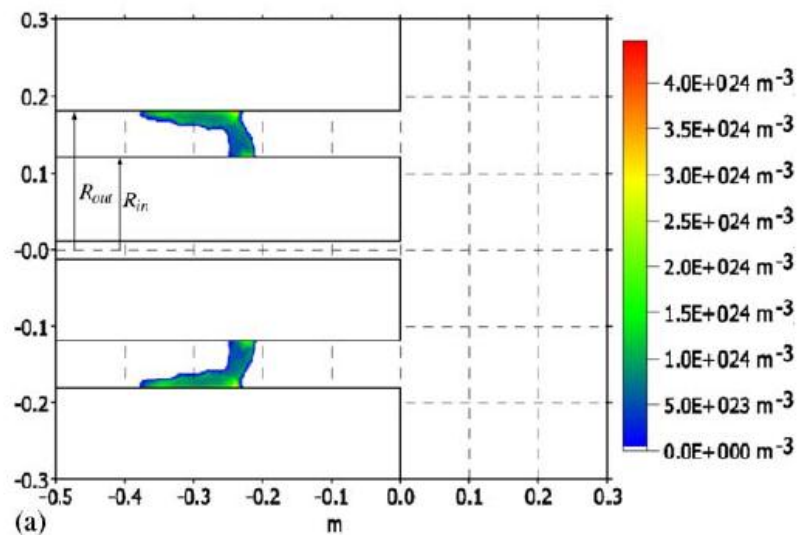


Mimo przyjęcia uproszczonego modelu uzyskane wyniki numeryczne dość dobrze zgadzają się jakościowo z wynikami eksperymentu [89] co pokazuje porównanie symulacji ze zdjęciami z szybkiej kamery (Rys.6.19 i Rys.6.20). Widać, że zaburzenia na warstwie prądowej, które pojawiają się w początkowej fazie pozostają „zamrożone” prawie do końca procesu i nie powodują dezintegracji kolumny plazmowej. Jednak ich amplituda jest mniejsza o eksperymentalnych. Długość i promień kolumny zgadzają się z mierzonymi. Jest widoczna również pewna rozbieżność w krzywiznie warstwy prądowej szczególnie w okolicach anody. Jej przyczyną są przyjęte warunki startu i uproszczone warunki brzegowe na elektrodzie.

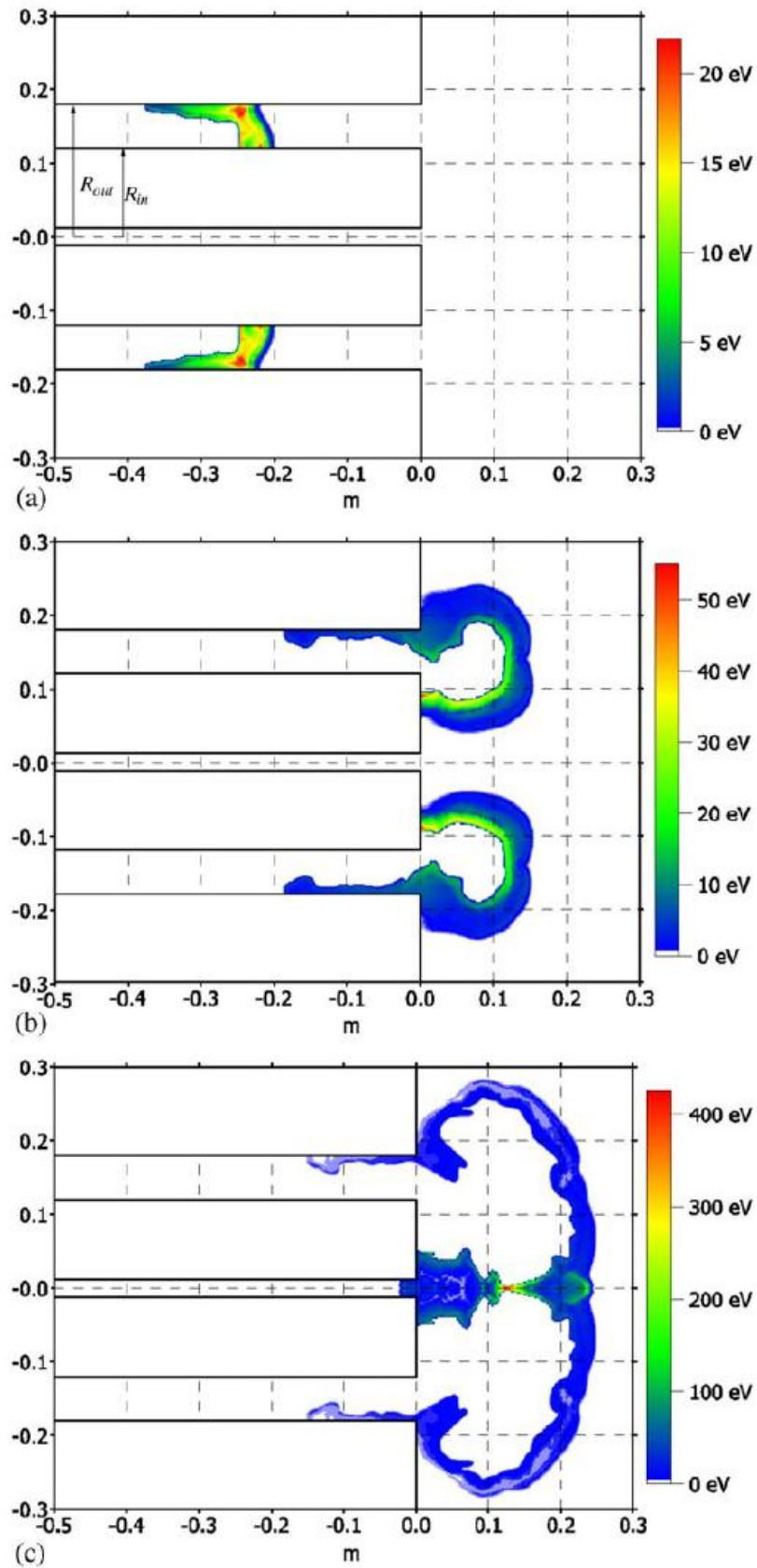
Kolejnym krokiem była symulacja w realnej geometrii od momentu przebicia [90]. Zakładam, że nastąpiło przebicie plazmy i w pobliżu izolatora o długości 10 cm mamy częściowo zjonizowaną ( $Z = n_e / (n_e + n_n) = 0.1$ ) warstwę plazmową przez którą zaczyna płynąć prąd. Przyjmuję, że gaz o ciśnieniu 4 Torr wypełniający komorę jest słabo zjonizowany -  $Z=0.01$ . Ten poziom jonizacji ma umożliwić rozpoczęcie procesu obliczeniowego kinetyki jonizacji po wzroście temperatury w punktach przylegających do poruszającej się warstwy prądowej. Całkowita długość elektrody centralnej wynosi 45cm.

Model fizyczny uzupełniony został o równanie obwodu elektrycznego. Oporność plazmy wyznaczam z wartości lokalnych po uśrednieniu  $R_p = \int \eta j^2 dV / \int j^2 dV$ . Podobnie wyznaczana jest indukcyjność plazmy  $L_p = 2 \int_{z_{min}}^{z_{max}} \sum_j \ln R_{ex}^j(z) / R_{in}^j(z) dz$  gdzie  $R_{ex}^j(z)$  - promień zewnętrznej granicy obszaru próżniowego,  $R_{in}^j(z)$  - promień granicy wewnętrznej

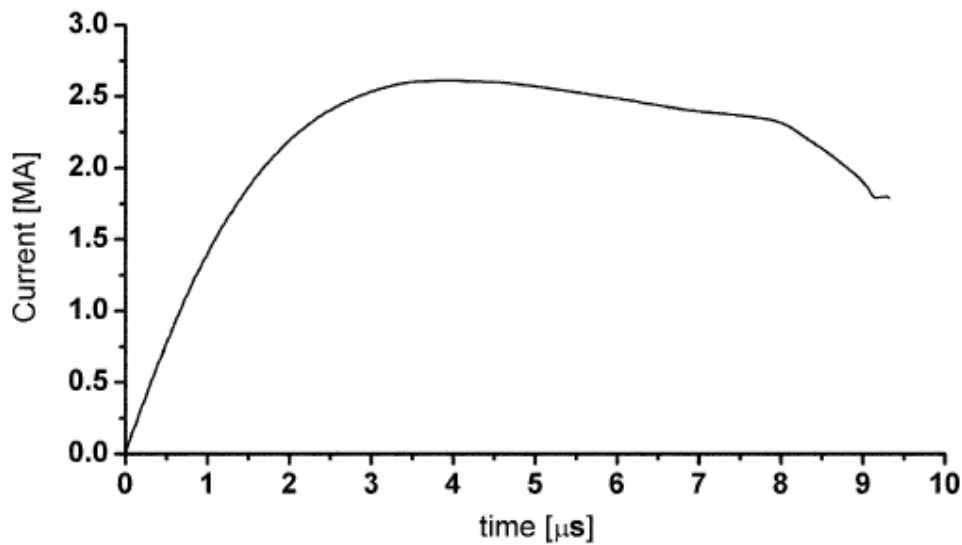
Do modelu włączono anomalną oporność i współczynniki z transportu dla plazmy częściowo zjonizowanej w polu magnetycznym.



Rys. 6.21 Rozkłady gęstości elektronowej a) dla  $t=4\mu\text{s}$  b) dla  $t=9\mu\text{s}$  c) dla  $t=10\mu\text{s}$  [90]



Rys.6.22 Rozkłady temperatury elektronowej a) dla  $t=4\mu\text{s}$  b) dla  $t=9\mu\text{s}$  c) dla  $t=10\mu\text{s}$



Rys. 6.23 Prąd całkowity w funkcji czasu

Prąd maksymalny z obliczeń (Rys. 6.23) jest o 15 % większy od prądu mierzonego w eksperymencie. Słabiej zaznaczone jest też załamanie prądu.

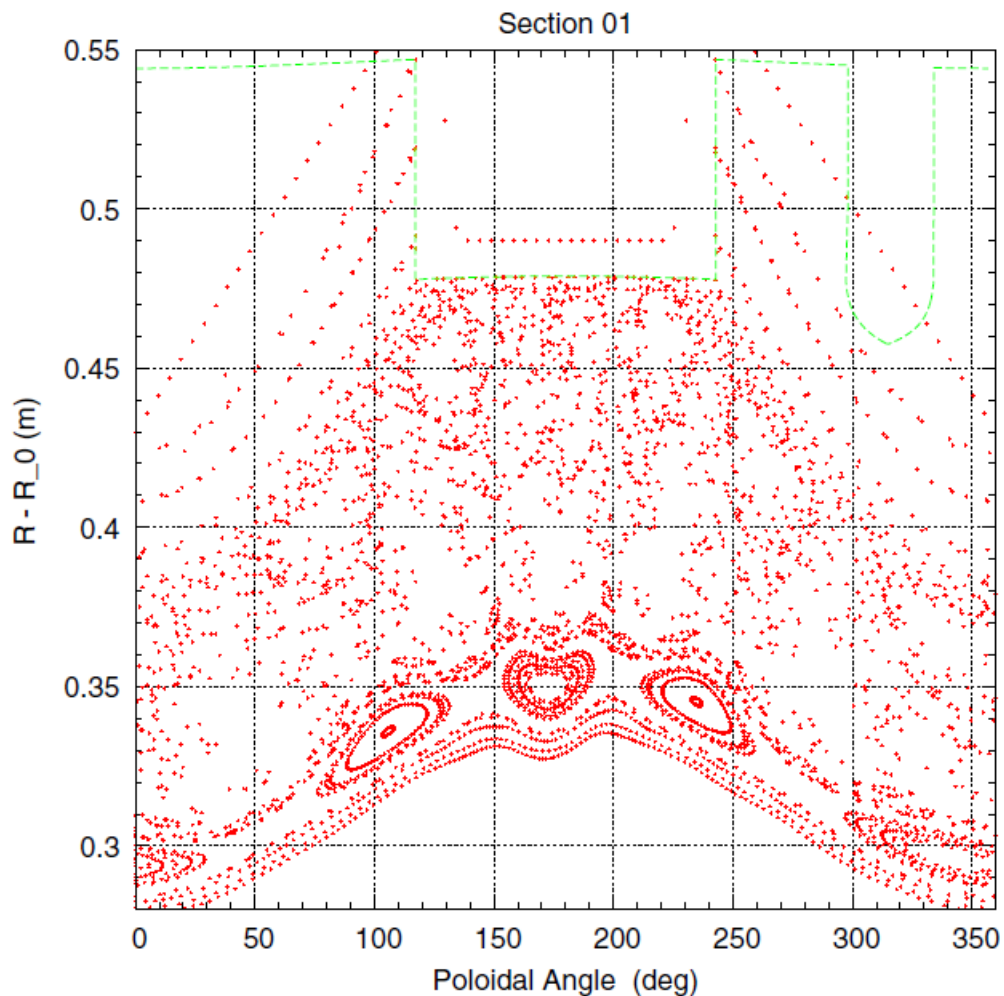
Prędkość warstwy prądowej po dojściu do końca elektrody wynosi  $8.9 \times 10^6 \text{ cm/s}$  i różni się stosunkowo niewiele od wartości mierzonej eksperymentalnie równej  $8.0 \times 10^6 \text{ cm/s}$ . Widać jak część zgarnianej w fazie akceleracji plazmy tworzy charakterystyczną „stopę” przylegającą do katody Rys.6.21. Plazma to może w późniejszej fazie po wychłodzeniu częściowej neutralizacji ułatwić powtórne przebicie. Sprawia ona też problemy w symulacji i dlatego punkty ją tworzące po spadku gęstości były usuwane z procesu obliczeniowego.

Minimalny promień pinchu w symulacji wynosi 0.48 cm i jest zbliżony do obserwowanego w eksperymencie. W pobliżu tego punktu gęstość elektronowa wynosi  $5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$  Rys 6.21. Po 8.5  $\mu\text{s}$  temperatura jonowa wzrasta do wartości 1.2keV po dojściu fali uderzeniowej do osi. Maksymalna temperatura elektronowa jest mniejsza i wynosi 600eV. Rys.6.22 Jest to potwierdzone eksperymentalnie [91]. W końcowej fazie widoczny jest rozwój niestabilności Rayleigh-Taylora (RT) rozwijającej się w czasie przyspieszonego ruchu warstwy plazmowej. Niestabilność RT to dynamiczny proces mieszania, który występuje, gdy płyn o mniejszej gęstości przyspiesza podtrzymująca go warstwę płynu o większej gęstości [92]. W naszym przypadku rolę lżejszego płynu gra pole magnetyczne przyspieszające plazmę. Liniowy inkrement narastania tej niestabilności  $\gamma$  wyraża się formułą  $\gamma = \sqrt{g \cdot k}$ , gdzie  $g \approx r_a / \tau_{kol}$  - przyspieszenie,  $k$  - liczba falowa. Z szacunków teorii uwzględniającej lepkość i oporność plazmy [93]. Inkrement narastania tej niestabilności dla wartości uzyskanych w obliczeniach jest rzędu  $10^6 \text{ s}^{-1}$ . Rozważania teoretyczne mają tylko charakter jakościowy - pokazują rolę efektów dyssypacyjnych (lepkości) w ograniczeniu narastania krótkofalowych zaburzeń, lecz trudno je porównywać z obliczeniami numerycznymi ze względu na nieliniowy charakter narastania niestabilności i trudności z wyborem parametrów określających

inkrement. Oprócz lepkości efekt stabilizujący ma krzywizna warstwy prądowej. W końcowej fazie droga swobodna jonów staje się porównywalna z promieniem pinch i przybliżenie hydrodynamiczne traci sens. Można dla tej fazy stosować tzw. opis hybrydowy w którym elektrony ze względu na zamagnesowanie można traktować płynowo a dla jonów stosować opis kinetyczny [94].

### 6.5 Zastosowanie metody do symulacji obszaru ergodycznego dywertora tokmaka TEXTOR

Algorytm metody swobodnych punktów można stosować do różnych zagadnień w których występują nieregularne siatki. Przykładem takiego zagadnienia jest symulacja plazmy dla tokamaka z ergodycznym diwertorem [95]. Z efektem ergodyzacji pola magnetycznego wiąże się nadzieje, na możliwość kontrolowania strumieni energii i cząstek w plazmie brzegowej. Oczekuje się zwiększenia transportu w poprzek pola magnetycznego i poszerzenia obszaru kontaktu plazmy w powierzchnia diwertora. Ergodyzacja pola magnetycznego powoduje, że znikają powierzchnie magnetyczne.

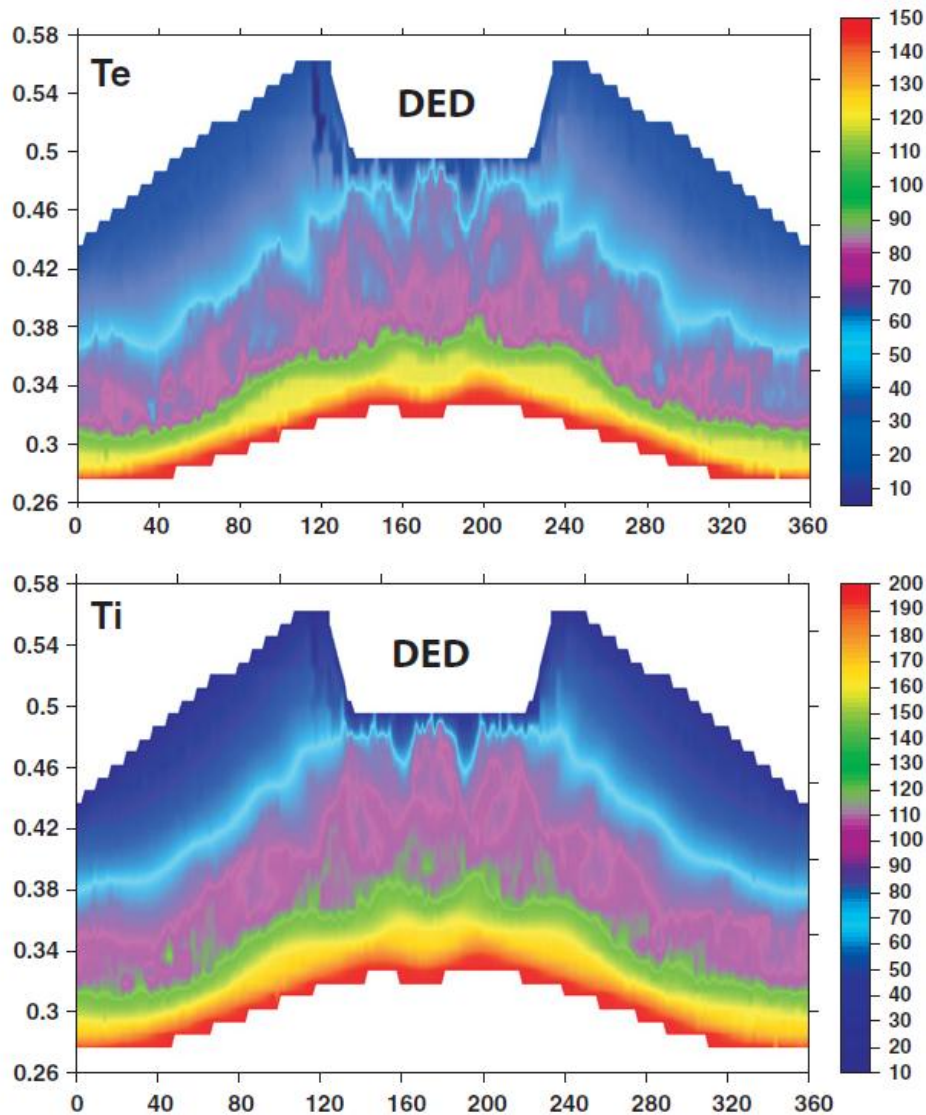


Rys. 6.24 Rozmieszczenie punktów w przekroju Poincare dla kąta  $\Phi = 0 \pmod{6/2}$  dla tokamaka TEXTOR-DED (119057 punktów)

Punkty siatki w danym przekroju są generowane przez program wyznaczający linię sił na podstawie znanego rozkładu pola magnetycznego. Cała trójwymiarowa siatka utworzona jest przez 24 takich przekrojów. Dołączono do niej punkty nie leżące na przekrojach, a będące zakończeniami linii otwartych. Wybór i selekcja punktów nie są zagadnieniem trywialnym. Gdy odległość między punktami w jednym z przekrojów jest mniejsza od promienia cyklotronowego wybieramy następną linię.

Na Rys. 6.24 przedstawiony jest przykładowy rozkład punktów (siatka) w przekroju Poincare dla kąta  $\Phi = 0$  i modu 6/2

W sąsiedztwie centralnej plazmy linie sił pola magnetycznego tworzą zamknięte powierzchnie oraz ciągi wysp. Dalej mamy szeroki obszar linii otwartych i zamkniętych linii ergodycznych.



Rys. 6. 25 Rozkłady temperatury elektronicznej  $T_e$  i jonowej  $T_i$  dla przekroju  $\Phi = 0$  i dla gęstości  $10^{19} \text{ m}^{-3}$  Oś pionowa to odległość od osi magnetycznej, oś pozioma to kąt poloidalny

W modelu uwzględniono jedynie równanie transportu dla temperatur  $T_e$  i  $T_i$  dla wybranych gęstości elektronowych ( $n_e = 0.1 \div 1.5 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ). Dla poprzecznego

transportu przyjęto stałe współczynniki przewodności rzędu dyfuzji Bohma. Na granicy plazmą centralną i ścianką warunek brzegowy to stała temperatura ( $T_e^{core} = 150, 200\text{eV}$ ,  $T_e^{wall} = 15\text{eV}$ ,  $T_i^{wall} = 20\text{eV}$ ), dla diwertora przyjęto warunek dla warstwy brzegowej. Rozkład temperatury (Rys. 6.25) oddaje topologie pola magnetycznego co świadczy o tym, że dominujący jest transport równoległy. Charakterystyczne są gorące miejsca (hot spot) w okolicach diwertora, które nie zależą od gęstości.

## 7. Podsumowanie

Jak pokazałem na przykładach modelowania różnych układów fizycznych metoda cząstek swobodnych jest efektywnym narzędziem numerycznym. Pozwala ona na symulacje dynamiki z dużymi odkształceniami ośrodka oraz umożliwia szybkie uwzględnianie nowych członów w równaniach. Oparty na tej metodzie kod daje się łatwo zrównoleglić, co znacząco przyspiesza obliczenia.

Z doświadczenia uzyskanego w trakcie obliczeń mogę stwierdzić, że istotną rolę w zagadnieniach z ostrą granicą plazma -próżnia odgrywają warunki brzegowe i sposób ich uwzględnienia (implementacja) w kodzie. Rozwój kodu – wprowadzenie schematu niejawnego dla równania transportu promieniowania i zrównoleglenie umożliwił obliczenia na gęstszej siatce i dojście do ekstremalnych parametrów dla przypadku x-pinchu. Dla tych zakresów parametrów plazmy korzystałem z najnowszych prac przy określeniu modelu fizycznego. Uzyskano dobrą zgodność z rejestrowaną w eksperymentach ewolucją x-pinch. Jest jeszcze sporo możliwości dalszych zastosowań przedstawionej metodyki.



## 8. Literatura

- [1] D.A. Frank-Kamieniecki, Wykłady z Fizyki Plazmy PWN, Warszawa 1968.
- [2] V. E. Fortov Extreme State of Matter Springer Berlin 2011
- [3] E. Morse Nuclear Fusion Springer Berlin 2018
- [4] S.I. Braginski, Voprosy Teorii Plazmy, red. M.A. Leontovich Gosatomizdat , Moskwa 1963, Vol.1, p. 183.
- [5] B.M. Zdanov, Yavleniya Perenosy v Mnogokomponentnoy Plazmie Energoizdat , Moskwa 1982
- [6] V. S. Imshennik, N. A. Bobrova Dinamika Stolknovitelnoy Plazmy Energoizdat Moskwa 1997
- [7] F.L Cochran ,J. Davis Physics of Fluids B Plasma Physics. **2** p. 2138 (1990)
- [8] P.Sheehy, J. Hammel, J. R. Lindemuth, D.W. Scdder, J.S. Schlachter, R.H. Loveberg, R. A. Riley Jr Physics of Fluids B Plasma Physics. **4** p. 3698 (1992)
- [9] J. H. Hammer, J. L. Eddleman, P.T Springer , M. Tabak, A. Toor , K.L. Wong, G.B. Zimmerman, C. Deeney , R. Humphreys T. J. Nash, T.W.L. Sanford, R. B. Spielman, J.S.D. Groot Phys. Plasmas **3** p. 2063 (1996)
- [10] J.P. Chittenden, S. V. Lebedev , C.A. Jennings, S. N. Bland A. Ciardi Plasma. Phys. Control. Fusion . **46** p. B457 (2004)
- [11] C. J. Garasi, D.E. Bliss, T.A, T.A Mehlorn B. V. Oliver, A.C. Robinson, G. S. Sarkisov Phys. Plasmas **11** p. 2729 (2004)
- [12] C.E. Seyler , M.R. Martin Phys . Plasmas **18** p. 012703 (2011)
- [13] V A. Gasilov, A.S. Boldarev, S. V. Dyachenko, O.G. Olkhovskya, E.L. Kartasheva, S.Nn. Boldyrev, G. A. Bagdasarov, I.V. Gasilova, M.S. Boyarov, V. A. Shmyrov Matem. Mod. **24** p. 55 (2012)
- [14] W. H. Bennet Phys Rev. **45** p. 891 (1934)
- [15] O.A Anderson, W. R. Baker, S.A. Colgate, H.P. Furth, J. Ise, R.V. Pyle, R.E. Wright Phys. Rev. **109** p.612 (1958)
- [16] D.D. Ryutov, M.S. Derzon, M.K. Matzen Rev. Mod. Phys. **72** p. 167 (2000)
- [17] M.G. Haines, Plasma Phys. Control. Fusion **53** p. 093001 (2011)
- [18] R. J. Lepper, T.J Alberts, J.R. Asay, P.M. Baca, K.I. Baker, S.P. Breeze, G.A. Chandler, D.L. Cook, G.W. Cooper, C. Deeney, M. S. Derzon, M.R. Douglas, D.I. Fehl, T. Gilliland, D.E. Hebron, M.J. Hurst, D. O. Jobe, J. W. Kellogg, J.S. Lash, S.E. Lazier, M.J. Matzen, D.M. McDaniel, J.S. McGurn, T.A. Mehlhorn, A.R. Moats, R.C. Mock, D.J. Muron, T.J. Nash, R.E. Olson, J.L. Porter, J.P. Quintenz, P.V. Reyes, L.E. Ruggles, C.L. Ruiz, T.W. L. Sanford, F.A. Schmidlapp, J.F. Seamen, R.B. Spielman, M.A. Stark, W.A. Struve, W.A. Stygar, D.R. Tibbetts-Russell, J.A. Torres, M. Vargas, T.C. Wagoner, C. Wakefield, J.H. Hammer, D.D. Ryutov, M.Tabak, S.C.Wilks, R.L. Bowers, K.D. McLenithan, D.L. Peterson Nucl . Fusion **39** p. 1283 (1999)
- [19] V.V. Aleksandrov, E. A. Bolhovitonov , G.S. Volkov, E.V. Grabovski, A.N. Gritsuk , S.F.Medovschikov, G.M. Oleinik, A.A. Rupasov, I.N. Frolov Plasma Phys. Rep. **42** p.1091 (2016)
- [20] S.A. Slutz, MC. Hermann, R.A. Vesey, A.B. Sefkow, D.B Sinars, D.C. Rovang, K.J. Peterson, M.E Cuneo Phys . Plasmas **17** p. 056303 (2010)

- [21] J. W. Mather *Methods of Experimental Physics* red. R.H. Loveberg, H.R. Griem New York, Academic Press 1971, Vol. 9B, p.187
- [22] A. Bernard, H. Bruzzone, P. Choi, H. Chuaqui, V. Gribkov, J. Herrera, H. Hirano, A. Krejci, S. Lee, C. Luo, F. Mezzetti, M. Sadowski, H. Schmidt, K. Ware, C.S. Wong, V. Zoita *Journal of Moscow Physical Society* **8**, p.97 (1998).
- [23] M. Scholz, B. Bieńkowska, M. Borowiecki, L. Karpiński, W. Stępniewski, M. Paduch, K. Tomaszewski, M. Sadowski, A. Szydłowski, P. Kubes, J. Kravarik *Nukleonika* **51** p. 79 (2006)
- [24] A. Szydłowski, A. Banaszak, B. Bieńkowska, I.M. Ivanova-Stanik, M. Scholz, M.J. Sadowski *Vacuum* **76** p. 357 (2004)
- [25] D.E. Potter, *Phys Fluids* **14** p.1911 (1971)
- [26] V.V. Vikhrev, S.I. Braginski *Voprosy Teorii Plazmy*, red. M.A. Leontovich Atomizdat Moskwa 1980, Vol.10, p. 243.
- [27] S. Maxon, J. Eddleman *Phys. Fluids*, **21**, p.1856 (1978)
- [28] K. Behler, H. Bruhns *Phys. Fluids* **30**, p.3767 (1987)
- [29] G. S. Kueny, D.G. Flicker, D.V. Rose SAND 2009-6373
- [30] B.T. Meehan, H.J. Niederhans *The Journal of Defense Modeling and Simulations: Applications, Methodology, Technology* **13**, p.153 (2014)
- [31] S. Lee, S.H. Saw, *Plasma Science and Technology for Emerging Economies* Springer 2017 p.113
- [32] A. Schmidt, A. Link, B.T. Meehan, C. Halvorson, E.C. Hagen *Phys. Plasmas* **21** p. 102703 (2014)
- [33] R.B. Spielman, C. Deeney, G.A. Chandler, H.L. Douglas, D.L. Fehl, M.K. Matzen, D.H. McDaniel, T.J. Naoh, J.L. Porter, T.W.L. Sanford, J.F. Seamen, W.A. Stygar, K.W. Struve, S.P. Breeze, J.S. McGurn, J.A. Torres, D.M. Zager, T.L. Galland, P.O. Jobe, J.L. McKenny, R.C. Mock, M. Varga, M. Wagoner, D.L. Peterson *Phys. Plasmas* **5** p. 2105 (1997)
- [34] Y. Maron, A. Starobinets, U.I. Fisher, E. Kroup, D. Osin, A. Fisher, C. Deeney, C.A. Overdale, P.D. Lepell, E.P. Yu, Jennigs, M.E. Cuneo, M.C. Hermann, J.L. Porter, T.A. Mehlhorn, J.A. Apruzese *Phys. Rev. Lett.* **111** p.035001 (2013)
- [35] S. M. Zakharov, G.V. Ivanenkov, A. A. Kolomenskii, A. A. Pikuz, A. I. Samokhin *Fiz. Plazmy* **13**, p.115 (1987)
- [36] S.A. Pikuz, T. A. Shelkovenko, D. Hammer *Plas. Phys. Rep.* **41** p.291 (2015)
- [37] M.P. Desjarlais *Contrib. Plasma Phys* **41**, p.267 (2001)
- [38] M. M. Bespalov, A. Ya. Polischuk *Pisma ZTF* **15** p.4 (1989)
- [39] Y.T. Lee, R. M. More *Phys. Fluids* **47** p. 1273 (1984)
- [40] R.C. Davidson, N.A. Krall *Nuc. Fusion* **17** p. 1213 (1977)
- [41] R.M. More, K.H. Warren, D.A. Young, G.B. Zimmerman *Phys. Fluids* **31** p.3059 (1988)
- [42] J. von Neumann, R.D. Richtmyer, *J. Appl. Phys.* **21** p. 232 (1950)
- [43] S. K. Godunov, *Chislennoie reschenye mnogomiernych zadach gazovoy dynamiki* Nauka, Moskwa 1976
- [44] E. J. Caramana, M.J. Shaskov, P.P. Whalen *J. Comp. Phys.* **144** p.70 (1998)
- [45] K.H. Winkler, M. L. Norman, D. Mihalas *Multiple Time Scales*, red. U. Brackbill B.I. Cohen Academic Press, New York 1985 p. 146

- [46] Y.Weng, R. Ahuja, B. Johansson J. Appl. Phys **66** p.6616 (2002)
- [47] L. V. Altshuler ,S. E. Brusnikin Teplofiz. Vys. Temp. **27** p.42 (1989)
- [48] N.N. Kalitkin , L.V. Kuzmina J. U.S.S.R. Comput. Math Math. Phys. **15** p.213 (1976)
- [49] O.N. Koroleva, A.V. Mazhukin, V.I. Mazhukin, P.V. Breslavskij Mathematica Montisnigri **35** p.37 (2016)
- [50] N. N. Kalitkin, I.A. Kozlitin Plas. Phys. Rep. **37** p.191 (2011)
- [51] N. N. Kalitkin, I.A. Kozlitin Plas. Phys. Rep. **37** p.191 (2011)
- [52] N. N. Kalitkin, I.A. Kozlitin Dokl. Phys. **61** p.579 (2016)
- [53] A. C. Kolb, R. W. P. McWhirter Phys. Fluids **7** p.519 (1964)
- [54] D. Duston, J. Duderstadt J. Apply Phys **49** p.4388 (1978)
- [55] Yu.V. Afanas'ev, E.G. Gammalii, V.B. Rozanov Trudy FIAN **134** p.11 (1982)
- [56] V.S. Volotkin, I.O. Golosnoi, N.N. Kalitkin Russian Physics Journal **38** p.342 (1995)
- [57] H.E. Wilhelm, S.E. Hong IEEE Trans. Plasma Sci. **7** p.183 (1979)
- [58] S. Lichtenberg, L. Dabringhausen, O. Langensheidt, J. Mentel J. Phys. D: Appl. Phys. **38** p. 3112 (2005)
- [59] M.S. Benilov, A. Marotta J. Phys. D: Appl. Phys. **28** p. 1869 (1995)
- [60] Y.I. Londer , K.N. Ulyanov IEEE Trans. Plasma Sci. **41** p.2261 (2013)
- [61] D. L. Shmelev, I.V. Uimanov IEEE Trans. Plasma Sci. **43** p.2002 (2015)
- [62] N.A. Bobrova, P.V. Sasorov, Fiz. Plazmy **16**, p.403 (1990)
- [63] J. I. Castor , Radiation Hydrodynamics, Cambridge University Press , 2004
- [64] R. Paul Drake High- Energy- Density Physics Springer (2006)
- [65] C.D. Levermore, G. C. Pomraning Astrophysical J. **248** p. 248 (1981)
- [66] G. D. Tsakiris, K. Eidman J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer **38** p .353 (1987)
- [67] E. Minugez , P.Martel, J.M. Gil, J.G. Rubiano, R. Rodriguez Fusion Eng. Des. **60** p.17 (2002)
- [68] R. L. Bowers J. R. Wilson Numerical Modeling in Applied Physics and Astrophysics Jones and Barlet Publishers Boston 1991
- [69] D. Potter Metody Obliczeniowe Fizyki PWN Warszawa 1982
- [70] S. Atzeni Comments on Plasma Physics and Controlled Fusion **10** p .129 (1986)
- [71] Y. T. Gu Int. J. Comput. Methods **2** p.477 (2005)
- [72] J. J. Monaghan Annu. Rev. Astron. Astrophys. **30** p. 543 (1992)
- [73] V.F. Dyachenko USSR Comp. Math. Math. Phys. . **5** p. 580 (1981)
- [74] V.F. Dyachenko, V.S. Imshennik Voprosy Teorii Plazmy, red. M.A. Leontovich Atomizdat Moskwa 1974 vol. 8 p. 164
- [75] Komputerowe Modelowanie Dynamicznych Oddziaływań Ciał Metodą Punktów Swobodnych, red. K. Jach PWN Warszawa 2001.
- [76] Yu. V. Rakitski, S.M. Ustinov, I.G. Czernorutski Cislennyie metody reshenia zhestkikh system Nauka Moskwa 1978
- [77] G. V. Ivanenkov, W. Stępniewski J. Moscow Phys. Soc . **9** p. 337 (1999)
- [78] G. V. Ivanenkov, W. Stępniewski Plasma Phys. Rep . **22** p. 459 (1996)
- [79] S. Yu. Gus'kov, G.V.Ivanenkov, A.R. Mingaleev,, S.A. Pikuz, V.B. Rozanov,

- W. Stępniewski, V.F. Tishkin , D.A. Hammer, T.A. Shelkovenko Plasma Phys. Rep. **26** p. 797 (2000)
- [80] G.V. Ivanenkov, A.R. Mingaleev, S.A. Pikuz, V.M. Romanova, T.A. Shelkovenko, W. Stępniewski, D.A. Hammer JETP **87** p.663 (1998)
- [81] S. Kirkpatrick Rev. Mod. Phys. **45** p.574 (1973)
- [82] G. V. Ivanenkov, W. Stępniewski Plasma Phys. Rep. **26** p.24 (2000)
- [83] J. P. Chittenden, A. Ciardi, C. A. Jennings, S. V. Lebedev, D. A Hammer, S. A. Pikuz, T. A. Shelkovenko Phys. Rev. Lett. **98** 025003 (2007)
- [84] G. V. Ivanenkov , W. Stępniewski, Plasma Phys. Rep. **28** p.814 (2002)
- [85] G. V. Ivanenkov , W. Stępniewski , S.Yu. Gus'kov Plasma Phys. Rep. **34** p.675 (2008)
- [86] M. Scholz, W. Stępniewski, B. Zelazińska Czech. J. Phys. **50 S.3** p.185 (2000)
- [87] M.A. Liberman, A.L. Velikovich J. Plasma Physics **31** p.369 (1984)
- [88] M. Scholz, W. Stępniewski, B. Bieńkowska, I. Ivanova-Stanik, R. Miklaszewski, M. Paduch, M.J. Sadowski, K. Tomaszewski Proc. Plasma 2005 (Opole-Turawa) AIP Conf. Proc. **812** p. 57 (2006)
- [89] B. Bieńkowska, M.Paduch , M.Scholz, W. Stępniewski , K. Tomaszewski IEEE Trans. Plasma Sci. **33** p.450 (2005)
- [90] W. Stępniewski , Vacuum **76**, 10 (2004) 52
- [91] J. Abdallah Jr., R.E.H. Clark A. Ya. Faenov, L. Karpiński, S.A. Pikuz, V.M. Romanova, M. Sadowski, M. Scholz , A. Szydłowski J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. **62** p.85 (1999)
- [92] S. Chandrasekhar Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability Clarendon Press Oxford 1981
- [93] M.G. Haines, P. D. Lepell, C.A Coverdale , B. Jones, C. Deeney , J. Apruzese, Phys. Rev. Lett. **96**, 075003 (2006).
- [94] S. Denus, M.Scholz W. Stępniewski Proc. Int. Conf. Plas. Phys. Lausanne vol **1** p. 167 1984
- [95] R. Zagórski, M.W. Jakubowski, A. Kalentev, O. Schmitz, R. Schneider, W. Stępniewski, Nucl. Fusion **48** (2008) 024013