Narodowe Centrum Badań Jądrowych

ul. Andrzeja Sołtana 7, 05-400 Otwock

Holograficzna interpretacja hydrodynamicznego prądu entropii w N=4 supersymetrycznej teorii Yanga-Millsa

Grzegorz Plewa

Praca napisana w Narodowym Centrum Badań Jądrowych
pod kierunkiem dr hab. Michała Spalińskiego

Warszawa 2013

Spis treści

Rozdział 1

Wprowadzenie

Jednym z najbardziej interesujących obszarów badań współczesnej teorii strun jest korespondencja AdS/CFT [1, 2, 3]. Najlepiej poznanym jej przykładem jest dualność pomiędzy konforemną, supersymetryczną teorią $\mathcal{N} = 4$ Yanga-Millsa, a pełną teorią strun typu IIB na przestrzeni asymptotycznie AdS. Ta pierwsza jest maksymalnie supersymetryczną teorią pola z nieabelową grupą cechowania $SU(N)$ i sektorem materii w reprezentacji dołączonej, przy czym część Lagrangianu odpowiadająca polom cechowania (gluonom), jest identyczna z QCD [4]. Niech g_{YM} oznacza stałą sprzężenia w teorii Yanga-Millsa. W granicy $N \to \infty$ dla $g_{YM}^2 N \gg 1$ teoria ta jest silnie sprzężona, podczas gdy poprawki strunowe i kwantowe w działaniu efektywnym po stronie grawitacyjnej można zaniedbać [5, 4]. W ten sposób korespondencja AdS/CFT łączy aspekty silnie sprzężonej teorii pola, z semiklasyczną teorią grawitacji [4, 6].

Ważny z punktu widzenia praktycznych zastosowań jest holograficzny opis stanów termicznych silnie sprzężonego układu. Przykładowym polem zastosowań mogą być eksperymenty, w których badane są zderzenia ciężkich jonów, prowadzone w akceleratorach takich jak RHIC czy LHC [5]. W eksperymentach tych powstaje gorąca plazma kwarkowo-gluonowa (sQGP) [7, 5].

W sytuacji, gdy ograniczamy się do skal znacznie większych od średniej drogi swobodnej związanej z oddziaływaniem, opisać ją można w fenomenologicznym języku relatywistycznej hydrodynamiki [8, 9, 10]. W opisie tym posługujemy się wielkościami hydrodynamicznymi, takimi jak jak gęstość energii, lokalna temperatura lub prędkość przepływu. Z wielkości tych zbudowane są tensor energii-pędu oraz zachowane prądy, przy czym równania hydrodynamiki dostajemy jako prawa zachowania tych wielkości [10, 11]. W sytuacji, w której rozważamy procesy związane z dyssypacją energii (przewodnictwo cieplne, lepkość etc.), wielkości zachowane zawierają człony ze współczynnikami transportu [10, 12]. Współczynniki te są parametrami[1], których ustalenie jest niemożliwe na gruncie podejścia fenomenologicznego i wymaga odwołania się do szczegółów mikroskopowej natury oddziaływań. W przypadku plazmy kwarkowo-gluonowej jest nią chromodynamika kwantowa. Jedną z możliwości wyjaśnienia zjawisk obserwowanych w akceleratorach RHIC czy LHC, jest założenie reżimu silnego sprzężenia [13, 14].

Zasadniczą trudnością pozostaje jednakże fakt, iż w reżimie silnego sprzężenia nie stosują się standardowe metody rachunku perturbacyjnego. Do obliczania własności statycznych istnieją skuteczne metody obliczeń numerycznych na sieciach [15], króre pozwalają np. na wyprowadzenie równania stanu opisującego gorącą plazmę. Niestety metody te nie dają wglądu w procesy dynamiczne. W szczególności nie sposób wyznaczyć w ten sposób współczynników transportu [16].

Materia opisywana przez $\mathcal{N} = 4$ SYM w zakresie temperatur odpowiadającym stanowi sQGP, ma z nim pewne cechy wspólne [17]. Przykładowo, gorąca plazma kwarkowo-gluonowa może być, podobnie jak materia w reprezentacji dołączonej w $\mathcal{N} = 4$ SYM, opisana równaniem stanu zbliżonym do równania gazu fotonowego. Ostatni fakt jest bezpośrednią konsekwencją symetrii konforemnej [10]. Szczegółowe porównanie własności plazmy supersymetrycznej i niesupersymetrycznej QCD w reżimie słabego sprzężenia [18, 19, 20] pokazują, że fizyczne własności tych układów są bardzo podobne. Sytuacja wygląda podobnie w teorii abelowej [21].

Supersymetryczna teoria Yanga-Millsa posiada holograficzny opis dualny – wynikająca z korespondencji AdS/CFT dualność płynowo-grawitacyjna [22, 10]. Pozwala ona na udzielenie jednoznacznych odpowiedzi na wiele pytań dotyczących plazmy $\mathcal{N} = 4$ SYM. W szczególności, daje ona możliwość wyprowadzenia opisu hydrodynamicznego i wyznaczenie współczynników transportu.

Silnie sprzężonej teorii Yanga-Millsa w stanie globalnej równowagi termodynamicznej

[1]Dokładniej, są one funkcjami temperatury.

odpowiadają rozwiązania równań Einsteina postaci geometrii z planarnym, statycznym horyzontem zdarzeń, tzw. rozwiązania czarnej brany [10, 23]. Stany termiczne układu sygnalizowane są rozwiązaniami zawierającymi horyzont w dualnej geometrii. Rozwiązania te mogą następnie posłużyć do znalezienia wartości oczekiwanych operatorów w $\mathcal{N} = 4$ SYM [24, 25, 26]. Przykładowo, wartość oczekiwana tensora energii-pędu może być zrekonstruowana w oparciu o wartości asymptotyczne metryki.

W sytuacji gdy układ nie jest w stanie globalnej równowagi, ale pozostaje jej bliski, opisać go można pewną macierzą gęstości. Bliskość oznacza fakt, iż wartość każdego z pól hydrodynamicznych określona jest na domenach, na których układ osiągnął lokalną równowagę i zmienia się nieznacznie przy przejściu z domeny na domenę [10]. Ponieważ z założenia odstępstwo od stanu globalnej równowagi jest niewielkie, wielkości hydrodynamiczne naturalnie jest konstruować w postaci szeregów rozwinięć gradientowych [10]. W rozwinięciach tych wyraz zerowego odpowiada przypadkowi globalnej równowagi, podczas gdy wyrazy wyższych rzędów wnoszą poprawki związane z procesami transportu. Te ostatnie budujemy z wszelkich możliwych pochodnych podstawowych wielkości hydrodynamicznych, jakie można wypisać zgodnie z wymaganą symetrią [9, 10]. W przypadku supersymetrycznej $\mathcal{N} = 4$ SYM jest to symetria konforemna [27, 28, 4]. Ogranicza ona znacząco liczbę możliwych członów, jakie należy wziąć pod uwagę konstruując wielkości hydrodynamiczne w ramach rozwinięć gradientowych. Wygodnym narzędziem, które upraszcza budowę obiektów transformujących się jednorodnie pod wpływem przekształceń symetrii konforemnej, jest formalizm Weyl niezmienniczy, wprowadzony przez Loganayagama [29].

Po stronie grawitacyjnej dualności stanom nierównowagowym bliskim stanowi równowagi odpowiadają rodziny wolnozmiennych geometrii zawierających horyzont [25, 10]. W rozwinięciu gradientowym mogą być one przedstawione jako niewielkie zaburzenia rozwiązania czarnej brany [25]. Dualność ta jest interesująca z kilku względów. Po pierwsze, można ją traktować jako naturalne uogólnienie wspomnianych wcześniej związków pomiędzy stanami termicznymi a statyczną geometrią. Po drugie, istnienie relacji pomiędzy dynamiką czarnych bran, a dynamiką płynów daje unikalną szansę zrozumienia aspektów rozwiązań z horyzontem w terminach hydrodynamiki. Umożliwia to również wgląd w dynamikę płynów z perspektywy rozwiązań równań Einsteina oraz pozwala zrozumieć własności samych horyzontów w języku nieliniowych równań hydrodynamiki. Wreszcie, po trzecie omawiana dualność ma użyteczne zastosowania praktyczne, do jakich należy opis plazmy teorii $\mathcal{N} = 4$ SYM, której pewne aspekty mogą być na tyle uniwersalne, że dają pewien wgląd w fizykę plazmy kwarkowo-gluonowej. Należy jednakże przy tym pamiętać, że w prawdziwej plazmie kwarkowo-gluonowej zachodzą niewątpliwie efekty, których $\mathcal{N} = 4$ SYM nie może opisać.

Bardzo ważnym zagadnieniem jest poszukiwanie rozwiązań dualnych do hydrodynamiki z zachowanym prądami, związanymi z zachowanymi ładunkami [30, 31]. Przypadek ten ma również potencjalne znaczenie praktyczne w kontekście produkcji plazmy kwarkowo-gluonowej – zachowanym ładunkiem jest tutaj liczba barionowa [5]. Z teoretycznego punktu widzenia, pożądane są tu własności teorii umożliwiającej holograficzny opis plazmy w skończonej temperaturze z potencjałem chemicznym [32]. Układ taki jest dualny do pola grawitacyjnego sprzężonego z potencjałem wektorowym [33, 34, 35, 36]. Istotnym elementem niniejszej pracy jest określenie geometrii dualnej do hydrodynamiki z zachowanym prądem $U(1)$ oraz grawitacyjna rekonstrukcja podstawowych wielkości hydrodynamicznych.

W porównaniu do wcześniejszych prac [31, 30], w których po raz pierwszy zostały znalezione rozwiązania równań Einsteina-Maxwella, rezultaty zaprezentowane w niniejszej pracy (zob. [37]), wnoszą kilka istotnych, nowych elementów. Przede wszystkim, znalezione tu rozwiązania dopuszczają dowolną, wolnozmienną metrykę w teorii Yanga-Millsa. Poza tym forma metryki i potencjału wektorowego jest znacznie prostsza i bardziej przejrzysta. Jest to spowodowane kilkoma czynnikami. Po pierwsze horyzont zdarzeń w zerowym rzędzie jest sparametryzowany w prostszy sposób (znaleziony w [38]). Po drugie wybór cechowania jest inny niż to użyte przez [31, 30] (jest on tożsamy z [39, 26]). W cechowaniu tym wchodzące, zerowe geodezyjne są krzywymi o stałych współrzędnych przestrzeni brzegowej. Dodatkowo na wszystkich etapach obliczeń wykorzystujemy formalizm Weyl-niezmienniczy w celu identyfikacji i pogrupowania wyrażeń transformujących się jednorodnie pod wpływem przekształceń konforemnych. Umożliwia to wypisanie postaci metryki i potencjału wektorowego, a następnie ustaleniu niewiadomych w toku rozwiązywania równań Einsteina-Hilberta. W porównaniu do przypadku nienaładowanego [26], ostateczne rozwiązania są wprawdzie bardziej złożone, nie mniej jednak dużo prostsze niż analogiczne rezultaty [31, 30]. W szczególności łatwo jest pokazać, że geometria znaleziona w [37], redukuje się do odpowiednich wyników zaprezentowanych w [26], w granicy nienaładowanej.

Ponieważ teoria grawitacji, która pojawia się w wyniku kompaktyfikacji teorii strun [34] wymaga występowania wyrazu Cherna-Simonsa [34, 30, 31], geometria dualna do hydrodynamiki z zachowanym prądem zawiera człony związane z łamaniem parzystości. Odpowiadają one symetrii $U(1)$ w teorii pola Yanga-Millsa i manifestują się także na poziomie hydrodynamiki [40].

Rozwiązanie grawitacyjne znalezione w rozwinięciu gradientowym jest nieosobliwe za wyjątkiem osobliwości w $r = 0$ (osobliwość czarnej brany). Zgodnie z hipotezą kosmicznej cenzury oczekujemy, że osobliwość ta będzie zakryta horyzontem zdarzeń. Udowodnienie tego jest ważnym, acz nietrywialnym zadaniem, dyskutowanym w Rozdziale 7. Znalezienie horyzontu zdarzeń dla rozważanej tu geometrii jest jednym z głównych wyników otrzymanych w niniejszej pracy.

Dotychczas omawialiśmy holograficzny opis stanów bliskich równowadze termodynamicznej. Wykorzystując korespondencję AdS/CFT jasne jest, że nie tylko stany termiczne i hydrodynamiczne, ale również nierównowagowe dalekie od stanu równowagi, mają dualny, holograficzny odpowiednik. Znalezienie takich rozwiązań wymaga odwołania się do metod numerycznych [41, 42, 43].

Centralnym zagadnieniem, które zbadamy na gruncie dualności płynowo-grawitacyjnej (zarówno w sytuacji istnienia zachowanych ładunków jak i ich braku), jest uogólnienie termodynamicznego pojęcia entropii na przypadek hydrodynamiki. Uogólnienie to dokonywane jest poprzez wprowadzenie tzw. prądu entropii [44, 29]. Prąd ten konstruowany jest fenomenologicznie w rozwinięciu gradientowym poprzez żądanie, by w stanie równowagi odtwarzał termodynamiczną gęstość entropii oraz by jego dywergencja określona na rozwiązaniach równań hydrodynamiki była nieujemna. Szczegółowa analiza konsekwencji uogólnienia pojęcia entropii na przypadek hydrodynamiki pokazała [45, 46], że już w drugim rzędzie rozwinięcia gradientowego występują dowolności w takiej jego definicji. Może to wskazywać na brak uwzględnienia istotnego elementu bądź konieczność doprecyzowania samej definicji. Inną możliwością jest fakt, iż prąd entropii może nie być określony jednoznacznie w wyższych rzędach rozwinięć gradientowych, ponieważ odstępstwa od stanu równowagi (w którym *de facto* pojęcie entropii ma sens), stają się zbyt duże. Interesującym jest więc ustalenie czy i w jaki sposób problem ten uwidacznia się po stronie grawitacyjnej korespondencji AdS/CFT. Wyjaśnienie tego jest głównym celem niniejszej pracy.

Dla statycznych czarnych dziur, pojęcie entropii związane jest poprzez znaną formułę Bekensteina [47] ze (statycznym) horyzontem zdarzeń. Przypadek horyzontów dynamicznych jest już dużo bardziej skomplikowany [48]. Należy tutaj pamiętać, że sam horyzont zdarzeń jest wielkością globalną, otrzymywaną na drodze teleologicznej – jego położenie może być określone dopiero wtedy, gdy znamy przyszłość wszystkich sygnałów wysłanych z zadanego punktu przed zdecydowaniem czy ów punkt jest wewnątrz horyzontu czarnej dziury, czy też nie [49]. Wynika stąd, że ewolucja horyzontu zdarzeń nie jest przyczynowa. Przykładowo, przyrost powierzchni horyzontu zdarzeń czarnej dziury nie jest bezpośrednio rządzony przez absorbowaną przez nią energię lub materię – efektem takiej absorpcji jest w istocie zmniejszenie jego tempa przyrostu [49]. Nie ma w tym nic problematycznego dopóki, dopóty nie wiążemy z pojęciem horyzontu zdarzeń jakiejkolwiek wielkości fizycznej. W sytuacji jednak, gdy horyzont zadaje prąd entropii, konsekwencją nieprzyczynowego zachowania horyzontu wydaje się być nieprzyczynowy prąd entropii [50, 51].

Otwartym pytaniem pozostaje kwestia, czy formuła Beckensteina może być zastosowana do przypadku horyzontów dynamicznych. Najprostszą możliwością jest założenie, że entropia jest wciąż proporcjonalna do powierzchni, lecz nie powierzchni horyzontu zdarzeń, ale hiperpowierzchni asymptotycznej do niej dla późnych czasów [52, 53, 54, 50]. Hiperpowierzchnia taka, podobnie jak horyzont zdarzeń, spełniałaby twierdzenie Hawkinga o przyroście pola powierzchni. Przykładem tego typu wielkości jest horyzont pozorny [55], rozumiany jako brzeg obszaru wyznaczanego przez powierzchnie złapane [49, 50]. Dla statycznych czarnych dziur horyzont pozorny i zdarzeń pokrywają się. W przypadku dynamicznym, horyzont pozorny jest zlokalizowany wewnątrz, bądź pokrywa się z horyzontem zdarzeń.

W przeciwieństwie do horyzontu zdarzeń, horyzont pozorny może być zlokalizowany w czasie. Ponadto jego ewolucja jest przyczynowa – wydaje się więc naturalnym przypuszczać, że stowarzyszony z nim prąd entropii będzie również przyczynowy. Z tego względu, mimo problemów koncepcyjnych, pojęciu horyzontu pozornego poświęcono wiele uwagi [49]. Ponadto odgrywa on istotną rolę w numerycznych obliczeniach ogólnej teorii względności, gdzie służy do przybliżonego określenia położenia horyzontu zdarzeń [56]. Podstawowym problemem jest przy tym zależność horyzontu pozornego od foliacji przestrzeni. W omawianej tu sytuacji interesuje nas Weyl-niezmienniczy horyzont pozorny, który okazuje się być wyznaczony jednoznacznie zarówno w przypadku z ładunkiem jak też i bez niego (pokazanie tego faktu należy do najbardziej istotnych wyników pracy).

W kontekście powyższych rozważań, naturalnym wydaje się przypuszczenie, że dowolności w definicji prądu entropii związane są z dowolnością wyboru definicji horyzontu, w oparciu o którą prąd ten liczymy. Głównym celem niniejszej pracy jest grawitacyjna rekonstrukcja prądów entropii, związanych zarówno z horyzontem zdarzeń, jak też i horyzontem pozornym dla geometrii dualnych do hydrodynamiki z i bez zachowanych prądów [51]. Do ich wyznaczenia wygodnie jest wykorzystać formułę na prąd entropii związany z hiperpowierzchnią horyzontu [54], pozwalającą na wyznaczenie prądów odpowiadających horyzontowi zdarzeń i horyzontowi pozornemu. Same horyzonty pozorne znajdowane są w sposób odmienny od standardowej metody polegającej na początkowym ustaleniu foliacji czasoprzestrzeni, a następnie śledzeniu obecności powierzchni złapanych. W opracowanej tu metodzie [50], wykorzystywane są maksymalnie własności symetrii konforemnej przy konstruowaniu kolejnych rzędów rozwinięcia gradientowego szukanych horyzontów. Dla geometrii dualnych do hydrodynamiki z zachowanym ładunkiem sprawdzono przy okazji poprawność formuły [54], porównując wyniki z czysto hydrodynamicznym podejściem przedstawionym w [40][2].

W przypadku bez zachowanych ładunków, prąd entropii związany z horyzontem zdarzeń i horyzontem pozornym różnią się współczynnikiem w jednym wyrazie. Różnica

[2]Formuła ta jest oczywiście poprawna dla geometrii dualnej do hydrodynamiki bez zachowanych ładunków.

ta odpowiada dokładnie jednoparametrowej swobodzie w dywergencji prądu entropii, otrzymanego na drodze czysto hydrodynamicznej przez Romatschke [45]. Z perspektywy fenomenologicznej definicji hydrodynamicznego prądu entropii nie sposób rozstrzygnąć, która powierzchnia horyzontu powinna być użyta. Jednakże przyczynowość wydaje się faworyzować horyzont pozorny [50, 51]. Sugeruje to, że brakującym kryterium ustalającym niejednoznaczności w hydrodynamicznej definicji prądu entropii może być przyczynowość ewolucji entropii.

W przypadku geometrii dualnych do hydrodynamiki z zachowanym prądem $U(1)$ prądy entropii związane z horyzontem zdarzeń i pozornym różnią się współczynnikami w dwóch wyrazach. Jak dotąd uogólnienie analizy Romatschke [45] nie zostało jeszcze wykonane na ten przypadek.

Rachunki składające się na [50] wykonano używając znakomitego programu `Cadabra` [57, 58]. Na potrzeby obliczeń stanowiących treść [37, 51], stworzono pakiet do obliczeń tensorowych w programie `Mathematica`, opisany w Dodatku A.

Plan pracy jest następujący. Rozdział pierwszy zawiera wstępne nakreślenie tematyki i późniejszych problemów. W rozdziale drugim omawiane są niektóre elementy korespondencji AdS/CFT oraz dualności płynowo-grawitacyjnej. Rozdział trzeci dotyczy podstaw relatywistycznej hydrodynamiki, w tym hydrodynamiki płynów konforemnych. W rozdziale czwartym dyskutujemy horyzonty dynamiczne oraz techniki ich wyznaczania. W rozdziale piątym konstruowana jest metryka dualna do płynów konforemnych przy braku dodatkowych (oprócz tensora energii-pędu), zachowanych prądów. W rozdziale szóstym znajdowana jest geometria dualna do hydrodynamiki z zachowanym prądem, którego obecność po stronie grawitacyjnej dualności sygnalizowana jest obecnością pola wektorowego oraz członu Cherna-Simonsa. Rozdział siódmy dotyczy prądów entropii. Zaczynając od formuły na prąd entropii znalezionej w [50], wyliczane są prądy dla geometrii znalezionych w rozdziałach poprzednich. Rozdział ósmy zawiera podsumowanie wyników pracy.

Praca uzupełniona jest dodatkami. Dodatek A zawiera opis pakietu do obliczeń tensorowych, napisanego w celu zrealizowania późniejszych obliczeń. W Dodatku B przedstawione są współczynniki funkcyjne metryki i potencjału wektorowego w drugim rzędzie, dualne do hydrodynamiki z zachowanym prądem. W Dodatku C wyznaczone są pozycje horyzontow w drugim rzędzie odpowiadające tej geomerii: rzeczywistego i pozornego, przy czym ekspansje niezbędne do ustalenia pozycji horyzontu pozornego zawiera Dodatek D.

Rozdział 2

Elementy korespondencji AdS/CFT

2.1 D-brany i korespondencja AdS/CFT

Najlepiej zbadaną formą korespondencji AdS/CFT jest dualność pomiędzy teorią strun typu IIB na przestrzeni $\mathrm{AdS}_5 \times S_5$, a maksymalnie supersymetryczną teorią $\mathcal{N} = 4$ Yanga-Millsa z grupą cechowania $SU(N)$ [1, 2]. Poniżej przyjrzymy się zarówno ogólnym aspektom tego formalizmu, jak też i związkom wykorzystanym w późniejszych rozdziałach.

2.1.1 D-brany: opis w formalizmie strun otwartych

Teoria strun IIB w dziesięciowymiarowej czasoprzestrzeni Minkowskiego przewiduje istnienie tzw. Dp-bran – obiektów solitonowych, które pojawiają się już na gruncie teorii klasycznej. Dp-brany[1] są w istocie konsekwencją spełnienia warunków brzegowych Dirichleta: rozumieć je można jako defekty przestrzeni, na których zaczynają się i kończą struny otwarte, a struny zamknięte mogą pękać, przy czym p określa liczbę kierunków przestrzenych brany [27]. Uwzględniając obecność Dp-bran, po kwantyzacji otrzymujemy widmo strun otwartych, reprezentujace fluktuacje Dp-bran. Widmo to zawiera skończoną liczbę modów bezmasowych i nieskończoną ilość masowych, o masach rzędu $1/l_s$. W granicy niskich energii ograniczyć się można do najlżejszych wzbudzeń bezma-

[1] A także ogólnie, p-brany.

sowych. Dla pojedynczej Dp-brany, w widmie tym znajdziemy abelowe pole cechowania $A_\mu(x)$ ($\mu = 0, ... 9$), $9-p$ pól skalarnych ϕ^i oraz ich supersymetryczne odpowiedniki. Pola skalarne ϕ^i zinterpretować można jako bozony Goldstone'a związane z łamaniem symetrii translacyjnej na $9-p$ kierunkach transwersalnych. Opisują one deformacje powierzchni brany oraz jej ruch [27, 5].

Rozważmy teraz układ N położonych blisko siebie, równoległych D-bran[2]. Ponieważ końce strun otwartych nie muszą być zakotwiczone na jednej i tej samej branie, struny mogą rozpościerać się również w przestrzeni pomiędzy nimi. Konsekwencją tego faktu jest pojawienie się w widmie pola cechowania $(A_\mu)^a_b$, $a, b = 1 ... N$, indeksowanego współczynnikami a, b numerującymi pozycje D-bran, do których przyczepione są struny. Mody bezmasowe odpowiadają $a = b$, tj. sytuacji w której oba końce struny znajdują się na tej samej branie, podczas gdy mody masowe związane są ze strunami przyczepionymi do różnych bran ($a \neq b$). Ich masa proporcjonalna jest do odległości pomiędzy branami. W granicy gdy odległość pomiędzy D-branami dąży do zera brany pokrywają się, a w widmie najniższych energii znajdziemy multiplet $U(N)$ pól cechowania oraz $9-p$ pól skalarnych w reprezentacji dołączonej. W ten sposób dochodzimy do wniosku, że niskoenergetyczne wzbudzenia D-bran powinny być opisane nieabelową teorią pola z cechowaniem [27, 5, 4]. W szczególności, dla układu D3-bran widmo tej teorii zawiera pole cechowania A_μ, sześć skalarów ϕ^i oraz cztery fermiony Weyla (wymagane przez supersymetrię) – wszystkie w reprezentacji dołączonej $U(N)$.

Bozonowa cześć gęstości Lagrangianu w działaniu efektywnym może być przedstawiona jako [5][3]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{g^2}\left(\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu\phi^i D^\mu\phi^i + [\phi^i, \phi^j]^2\right) \tag{2.1}$$

Wzbudzenia podgrupy $U(1)$ opisują ruch środka masy brany i odsprzęgają się od pozostałych modów zadanych przez $SU(N)$. Lagrangian (2.1) opisuje bozonową część $\mathcal{N} = 4$ supersymetrycznej teorii Yanga-Millsa w czterech wymiarach z grupą cechowania $SU(N)$, przy czym stała sprzężenia g_{YM} związana jest ze stałą sprzężenia w teorii strun g_s zależ-

[2]Dla wygody,w toku dalszych rozważań będziemy często pomijać indeks p

[3]Dokładniej (2.1) jest najogólniejszym, renormalizowalnym, maksymalnie supersymetrycznym Lagrangianem

nością

$$g_{YM}^2 = 4\pi g_s. \tag{2.2}$$

Granica dużego N

Teoria Yanga-Millsa z grupą cechowania $SU(N)$ może być istotnie uproszczona w granicy w której $N \gg 1$ tzn. w tzw. granicy t'Hoofta [59]. W przypadku opartej na $SU(3)$ QCD, wzięcie tej granicy jest tożsame ze zwiększeniem liczny kolorów kwarków.

Na wstępie potraktujmy N jako parametr i przyjrzyjmy się rozwinięciom fizycznych wielkości w $1/N$. Dla ustalenia uwagi rozważmy Euklidesową sumę statystyczną

$$Z = \int DA_\mu \exp\left(-\frac{1}{4g_{YM}^2}\int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{tr}F^2\right). \tag{2.3}$$

Wprowadzając stałą sprzężenia t'Hoofta

$$\lambda := g_{YM}^2 N, \tag{2.4}$$

otrzymujemy amplitudę próżnia-próżnia [5] postaci

$$\ln Z = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h} f_h(\lambda) = N^2 f_0(\lambda) + f_1(\lambda) + \frac{1}{N^2} f_2(\lambda) + ... \tag{2.5}$$

W ostatnim wzorze $f_h(\lambda)$ są funkcjami tylko i wyłącznie stałej t'Hoofta. Dodatkowo, w granicy dużego N, wkłady reprezentujące poprawki wyższych rzędów, są tłumione przez wysokie potęgi N w mianownikach. Z podobną sytuacją mamy do czynienia w przypadku rozwinięcia perturbacyjnego teorii strun zamkniętych. Amplituda próżnia-próżnia może być przedstawiona jako [5]

$$\mathcal{A} = \sum_{h=0}^{\infty} {g_s}^{2h-2} F_h(\alpha') = \frac{1}{g_s^2} F_0(\alpha') + F_1(\alpha') + g_s^2 F_2(\alpha') + ... \tag{2.6}$$

Porównując (2.5) i (2.6) można wywnioskować, że stała g_s w rozwinięciu perturbacyjnym teorii strun związana jest z N relacją

$$g_s \sim \frac{1}{N}. \tag{2.7}$$

Widzimy zatem, że w sytuacji gdy N jest duże, możemy zaniedbać poprawki strunowe w działaniu efektywnym.

2.1.2 D-brany: opis w formalizmie strun zamkniętych

W poprzedniej sekcji opisaliśmy D-brany jako obiekty, na których kończą się struny otwarte. Są one masywne: ich masa na jednostkę p-objętości skaluje się jak $1/g_s$. W granicy $g_s \to 0$ stają się więc one nieskończenie ciężkie[4], a ich wzbudzenia efektywnie odprzęgają się z widma [4]. Jak każdy obiekt obdarzony masą, D-brany są również źródłem pola grawitacyjnego. Rozwiązaniem równań ruchu wynikających z działania teorii supergrawitacji IIB, dla układu N równoległych D-bran, jest następująca metryka [60, 5]

$$\mathrm{d}s^2 = H^{-1/2}(r)\left(-\mathrm{d}t^2 + \sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}x_i^2\right) + H^{1/2}(r)\left(\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega_5^2\right), \tag{2.8}$$

gdzie

$$H(r) = 1 + \frac{L^4}{r^4}, \quad L^4 = 4\pi g_s N l_s^4, \tag{2.9}$$

natomiast L jest parametrem skali – promieniem określającym oddziaływania grawitacyjne bran. Dodatkowo otrzymujemy

$$F_{(5)} = (1 + *)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\,H^{-1}, \tag{2.10}$$

$$g_s = e^{\phi}. \tag{2.11}$$

Rezultat (2.8) opisuje geometrię układu ekstremalnych D3-bran o zerowej temperaturze, przy czym horyzont zdarzeń zlokalizowany jest w $r = 0$. Ponieważ $*F_5 = F_5$, forma ta jest samosprzężona (sprzęga się jednocześnie elektrycznie i magnetycznie do D3 brany). Ładunek Ramonda-Ramonda dany jest całką z F_5 i jest równy co do wartości N. Obecność zachowanego ładunku gwarantuje, że rozwiązanie postaci D3-brany jest stabilne [27].

Rozważmy teraz przypadki graniczne odpowiadające słabym ($r \gg L$) i silnym ($r \ll L$) polom grawitacyjnym [4]. Dla dużych r, z daleka od brany $H(x) \to 1$, w związku z czym metryka (2.8) redukuje się do metryki płaskiej czasoprzestrzeni

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}x_i^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega_5^2. \tag{2.12}$$

[4] W tym sensie, że masa na jednostkę objętości jest nieskończenie duża.

Z drugiej strony, w pobliżu horyzontu, tzn. w granicy $r \to 0$, mamy $H(r) \to L^4/r^4$, w związku z czym (2.8) daje się przepisać jako

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{r^2}{L^2}\left(-\mathrm{d}t^2 + \sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}x_i^2\right) + \frac{L^2}{r^2}\left(\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega_5^2\right). \tag{2.13}$$

Definiując $z = L^2/r$ przepisujemy (2.13) jako

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{L^2}{z^2}\Big(- \mathrm{d}t^2 + \sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}x_i^2\Big) + \frac{L^2}{z^2}\mathrm{d}z^2 + L^2\mathrm{d}\Omega_5^2. \tag{2.14}$$

Daleko od horyzontu brany czasoprzestrzeń jest więc płaską czasoprzestrzenią Minkowskiego, natomiast w jego pobliżu przybiera postać przestrzeni $AdS_5 \times S_5$. Zauważmy, że w metryce (2.14) L jest promieniem AdS oraz wyznacza promień pięciowymiarowej sfery.

2.1.3 Dualność holograficzna

Jak zobaczyliśmy, D-brany mają dwa komplementarne opisy: opis w terminach strun otwartych, w którym są one traktowane jako hiperpowierzchnie w płaskiej czasoprzestrzeni na których kończą się struny oraz opis w terminach strun zamkniętych, w którym bierzemy pod uwagę wytwarzane przez nie pole grawitacyjne. Rozważmy teraz granicę niskich energii. Daleko od brany, w rejonie w którym czasoprzestrzeń jest w przybliżeniu czasoprzestrzenią Minkowskiego, w granicy niskich energii powinniśmy brać pod uwagę jedynie bezmasowe mody supermultipletu grawitonowego [4]. Ponieważ stała sprzężenia oddziaływań jest proporcjonalna do iloczynu (dziesięciowymiarowej) stałej grawitacji i ósmej potęgi energii [5], w granicy niskich energii mody te odsprzęgają się od pozostałych. Mody te, będące masywnymi wzbudzeniami w widmie strun zamkniętych, w miarę jak przesuwamy się w kierunku brany, tzn. w granicy $r \to 0$, stają się coraz bardziej przesunięte ku czerwieni z punktu widzenia obszaru asymptotycznego. Niskoenergetyczne wzbudzenia lokalizujemy więc w pobliżu horyzontu, wokół którego metryka przybiera postać (2.13).

Jak pamiętamy, granica niskoenergetyczna w widmie strun otwartych zakończonych na D-branach, odpowiadała wzięciu pod uwagę bezmasowych wzbudzeń tychże strun. Efektywnie prowadziło to do supersymetrycznej teorii Yanga-Millsa z grupą cechowania

$SU(N)$. Jednakże ponieważ opisujemy na dwa różne sposoby jeden i ten sam układ D-bran, oba obrazy powinny być sobie równoważne. Wynika stąd, że powinna istnieć dualność między teorią strun typu IIB na przestrzeni $AdS_5 \times S_5$, a supersymetryczną, konforemną teorią Yanga-Millsa. Ponieważ w większości przypadków dokonując redukcji Kaluzy-Kleina w opisie grawitacyjnym możemy pominąć pięciowymiarową S_5, dualność ta często wyrażana jest jako korespondencja pomiędzy pięciowymiarową teorią grawitacjji w AdS, a czterowymiarową teorią pola na jej (konforemnym) brzegu. Ostatni fakt jest przykładem realizacji zasady holograficznej [61, 62], mamy tutaj odpowiedniość pomiędzy teorią grawitacji w efektywnie o jeden więcej wymiarowej czasoprzestrzeni, a teorią bez grawitacji na jej brzegu.

Dwa opisy D-bran są użyteczne dla określonych wartości parametrów g_s[5] i N [4, 5]. W sytuacji gdy $g_s N \ll 1$ z (2.9) widzimy, że $L \ll l_s$, tzn. promień charakteryzujący oddziaływania grawitacyjne bran staje się znacznie mniejszy od parametru skali w teorii strun. Oznacza to, że czasoprzestrzeń jest niemal płaska wszędzie za wyjątkiem obszaru bardzo bliskiego branie. W obszarze tym mamy do czynienia z odziaływaniami strun zamkniętych, do których opisu, z uwagi na silne pole grawitacyjne przybliżenie supergrawitacyjne przestaje się stosować. Z tego też powodu opis układu D-bran w języku strun zamkniętych nie jest w tym przypadku użyteczny. Z drugiej strony dla $g_s N \gg 1$ znajdujemy $L \gg l_s$, co implikuje, że geometria jest słabo zakrzywiona. Opis w teorii strun zamkniętych może być zatem znacząco uproszczony (rozważamy słabe pole grawitacyjne). W praktyce usprawiedliwia to podejście efektywne poprzez teorię supergrawitacji, a nawet ogólnej teorii względności. Równocześnie jednak podejście bazujące na układzie strun otwartych przestaje być użyteczne. Dzieje się tak z uwagi na fakt, iż $g_s N$ rządzi stałą sprzężenia w poprawkach pętlowych do teorii Yanga-Millsa. W przypadku $g_s N \gg 1$ stała ta jest duża co implikuje, że teoria staje się nieperturbacyjna.

Z powyższych przykładów wynika ważna cecha korespondencji AdS/CFT: słabosprzężona teoria Yanga-Millsa odpowiada silnie sprzężonej teorii strun w $AdS \times S_5$. Odwrotnie, silnie sprzężona teoria pola na brzegu odpowiada semiklasycznej teorii grawitacji w efektywnie pięciowymiarowej czasoprzestrzeni. W ten sposób formalizm zadaje

[5] Pamiętamy przy tym, że z (2.11) wynika, że g_s jest parametrem związanym z dylatonem.

niezwykle przydatne narzędzie do badania klasy nieperturbacyjnych teorii pola, których aspekty tłumaczą się na dualne holograficzne teorie grawitacji.

2.2 Funkcje korelacji

Dyskutując opis układu czarnych bran (2.1) podaliśmy ogólne przesłanki za tym, że supersymetryczna teoria Yanga Millsa powinna być dualna do teorii strun IIB. Istnienie korespondencji umożliwia holograficzny opis jednej teorii w ramach drugiej. Aby jednakże opis taki stał się możliwy, należy podać „słownik” tłumaczący odpowiednie terminy.

Poniżej przedyskutujemy pewne najistotniejsze jego elementy. Dla zachowania ogólności, w toku dalszej analizy przyjmiemy, że brzegowa teoria pola jest d-wymiarową konforemną teorią cechowania, dualną do efektywnie $d+1$ wymiarowej teorii grawitacji. Zacznijmy od tego, że z (2.11) widzimy, iż stała g_s nie jest parametrem swobodnym teorii lecz dana jest przez wartość oczekiwaną dylatonu. Ta z kolei jest w ogólności funkcją współrzednych czasoprzestrzeni. Funkcję tę możemy uczynić stałą, biorąc pod uwagę asymptotyczne zachowanie w nieskończoności $g_s = e^{\phi_\infty}$. W tym sensie g_s pełni rolę stałej sprzężenia w teorii strun. Zauważmy następnie, że zgodnie z tym co powiedzieliśmy o czasoprzestrzeni przy powierzchni brany, wartość brzegowa ϕ związana jest z brzegiem ∂AdS. Wynika stąd, że każde zaburzenie teorii pola generowane zmianą stałej sprzężenia, skutkuje zmianą wartości brzegowych pól dualnej teorii grawitacji. Zgodnie z propozycją daną przez [3, 63], za punkt startowy w poszukiwaniach wymaganych relacji dualności, może posłużyć formuła następująca łącząca funkcje korelacji

$$Z_{CFT}[\phi(x)] = Z_{string}[\Phi|_{\partial AdS}], \tag{2.15}$$

przy czym $\Phi = \Phi(x, z)$ dla $z = 1/r$ (r jest kierunkiem radialnym od powierzchni brany) jest polem w $d+1$ wymiarowej przestrzeni, natomiast $\phi(x)$ d-wymiarowym operatorem dualnym do niego. Wyobraźmy sobie następnie, że modyfikujemy działanie po stronie teorii pola, dodając do niego skalarny człon ze źródłem $\phi(x)$

$$S_{bdry} \to S_{bdry} + \int \mathrm{d}^d x \phi(x) \mathcal{O}(x), \tag{2.16}$$

gdzie $\mathcal{O}$ jest pewnym lokalnym operatorem. W myśl (2.15) powinna istnieć relacja pomiędzy brzegową wartością $\Phi|_{\partial AdS}$, a $\phi(x)$. Odwołując się do przykładu z dylatonem, w którym wartość g_s była dana poprzez e^{ϕ_∞}, możemy przyjąć

$$\phi(x) = \Phi|_{\partial AdS}(x) = \lim_{z\to 0} \Phi(x, z). \tag{2.17}$$

Należy jednakże zaznaczyć, że (2.17) jest poprawny jedynie dla bezmasowego Φ – w przypadku masywnym sytuacja nieznacznie komplikuje się. Prawa strona (2.15) upraszcza się jednakże w granicy klasycznej, w której teoria strun jest słabo sprzężona. Używając przybliżenia punktu siodłowego dostajemy

$$Z_{string} \simeq \exp\left(S^{ren}[\Phi^E]\right), \tag{2.18}$$

gdzie $S^{ren}[\Phi^E]$ jest zrenormalizowanym (wyjaśnimy to za chwilę), klasycznym działaniem pojawiającym się na gruncie teorii supergrawitacji i określonym na rozwiązaniach klasycznych równań ruchu $\Phi^{(E)}(x, z)$. Konieczność renormalizacji wiąże się z tym, że działanie jest osobliwe na brzegu, tj. w granicy $z \to 0$.

Funkcje $\Phi^{(E)}(x, z)$ są rozwiązaniami masywnego równania Kleina-Gordona w AdS_{d+1} o sygnaturze Euklidesowej.[6]. Równanie to ma dwa rozwiązania, które dla $z \to 0$ zachowują się jak $z^{d-\Delta}$ i z^{Δ}, przy czym

$$\Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + L^4 m^2} \tag{2.19}$$

(L jest promieniem AdS). Dalej można pokazać, że uogólnieniem (2.17) na przypadek masywnego pola jest

$$\phi(x) = \lim_{z\to 0} z^{\Delta-d}\Phi^{(E)}(x, z). \tag{2.20}$$

Powyższe równanie stanowi przykład związków pomiędzy polami w AdS a lokalnymi oparatorami na brzegu. Ważną i najlepiej poznaną klasę tych dualności stanowią relacje pomiędzy operatorami reprezentującymi prądy globalnych symetrii [5], a ich dualnymi odpowiednikami w teorii grawitacji. Przykładowo, rozważmy jako źródło potencjał wektorowy A_μ odpowiadający zachowanej symetrii $U(1)$. Wielkość skalarną, zadającą w myśl

[6]W tym sensie, że standardowo zamieniamy czasową współrzędną $t \to it$.

(2.16) poprawkę skalarną do działania, otrzymamy sprzęgając A_μ do zachowanego prądu J^μ:

$$S_{bdry} \to S_{bdry} + \int \mathrm{d}^d x A_\mu(x) J^\mu(x). \tag{2.21}$$

Przywołując (2.17) możemy zinterpretować d-wymiarowe $A_\mu(x)$ jako wartość brzegową $d+1$-wymiarowego pola cechowania w „pełnej" przestrzeni $A_\mu(x,z)$. W analogiczny sposób metryka sprzęga się do tensora energii-pędu

$$S_{bdry} \to S_{bdry} + \int \mathrm{d}^d x g_{\mu\nu}(x) T^{\mu\nu}(x), \tag{2.22}$$

przy czym wartość brzegową $d+1$ wymiarowej metryki interpretujemy jako źródło dla zachowanego $T^{\mu\nu}$.

Mając $S^{ren}[\Phi^E]$, możemy wyznaczyć funkcje korelacji. Z (2.16) wynika, że wartość oczekiwana $\langle \mathcal{O}(x) \rangle$, zadana jest poprzez pochodną funkcjonalną działania S_{bdry}. Powyższa reguła uogólnia się na przypadek ogólniejszych korelatorów

$$\langle \mathcal{O}(x_1)...\mathcal{O}(x_n) \rangle = \frac{\delta^n S^{ren}[\Phi^E]}{\delta\phi(x_1)...\delta\phi(x_n)} \tag{2.23}$$

W niniejszej pracy ograniczymy się do funkcji jednopunktowych

$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle = \frac{\delta S^{ren}[\Phi^E]}{\delta\phi(x)} \tag{2.24}$$

Przykładowo, tensor energii pędu, którego źródłem w myśl (2.22) jest metryka mamy

$$\langle T^{\mu\nu}(x) \rangle = \lim_{z\to 0} \frac{\delta S^{(ren)}[g^{(E)}_{AB}]}{\delta g^{(E)}_{AB}}, \tag{2.25}$$

przy czym metryka g_{AB} jest metryką przestrzeni asymptotycznie AdS_{d+1}. W identyczny sposób otrzymać możemy zachowany prąd

$$\langle J^\mu(x) \rangle = \lim_{z\to 0} \frac{\delta S^{(ren)}[A^{(E)}_M]}{\delta A^{(E)}_M}. \tag{2.26}$$

Pozostaje jeszcze wyjaśnić, w jaki sposób możemy uzyskać znormalizowane działanie S^{ren}. Otrzymywanie odpowiedniej formy gwarantowane jest przez procedurę holograficznej renormalizacji [64, 65, 66], która polega na dodaniu odpowiednich kontrczłonów. W celu ich znalezienia, a tym samym usunięcia rozbieżności wprowadza się obcięcie skali, przykładowo $z = \epsilon$. Niezrenormalizowane działanie można następnie przedstawić w postaci sumy

$$S[\Phi, \epsilon] = S^{div}[\Phi, \epsilon] + S^{con}[\Phi, \epsilon] \tag{2.27}$$

przy czym $S^{div}[\epsilon]$ oznacza część rozbieżną, a $S^{con}[\epsilon]$ zbieżną w granicy $\epsilon \to 0$. Część rozbieżna może być następnie usunięta poprzez dodanie członu brzegowego

$$\Delta S = -S^{div}[\Phi|_{z=0}, \epsilon], \tag{2.28}$$

tak, że ostatecznie

$$S^{(ren)} = \lim_{\epsilon\to 0} \left(S[\Phi, \epsilon] + \Delta S\right). \tag{2.29}$$

2.3 Stany termiczne, hydrodynamiczne i nierównowagowe

W poprzednich paragrafach nakreśliliśmy istotne elementy korespondencji AdS/CFT na przykładzie dualności pomiędzy supersymetryczną teorią Yanga-Millsa, a teorią supergrawitacji IIB, przy czym opisane rozwiązania odpowiadały przypadkowi o zerowej temperaturze. Dualność AdS/CFT jest jednak dużo bardziej ogólna: łączy ona pełną teorię strun z efektywnie o jeden wymiar mniejszą teorią pola na brzegu. Wykorzystując ją możliwy jest opis zarówno stanów termicznych, jak też i nierównowagowych.

2.3.1 Własności termiczne rozwiązań z horyzontem

Ważnym odkryciem związanym z fizyką czarnych dziur jest kwantowo-mechaniczny proces Hawkinga [67, 68], w wyniku którego czarne dziury emitują promieniowanie podobnie jak ciało doskonale czarne o określonej temperaturze T. Co więcej własności (statycznych) czarnych dziur, związane z faktem istnienia horyzontu, dają się wyrazić w języku praw termodynamiki [47, 69, 70, 67, 68]. Przykładowo, dla czarnej dziury Schwarzchilda, entropia Bekensteina-Hawkinga jest proporcjonalna do powierzchni horyzontu zdarzeń [47, 69, 70]

$$S = \frac{A}{4G}. \tag{2.30}$$

W istocie definicję entropii oprzeć można o dowolną hiperpowierzchnię, spełniającą twierdzenie o przyroście pola powierzchni, taką jak horyzont pozorny [49], będący przedstawicielem szerszej klasy tzw. horyzontów kwazi-lokalnych. W przypadku statycznych czarnych dziur wszystkie one pokrywają się z horyzontem zdarzeń, zatem entropia jest jednoznacznie określona.

Użytecznym narzędziem do znajdowania wielkości termodynamicznych związanych z czarnymi dziurami, jest formalizm całek po trajektoriach w przestrzeni Euklidesowej, otrzymanej poprzez zastąpienie współrzędnej czasowej $t \to it$ [71, 63]. W formalizmie tym, temperaturę Hawkinga czarnej dziury znaleźć można identyfikując okres euklidesowej współrzędnej czasowej – temperatura jest równa odwrotności tego okresu. Sama okresowość wymagana jest natomiast przez warunek regularności na horyzoncie w przestrzeni euklidesowej. Stosując przybliżenie punktu siodłowego i uwzględniając fakt, iż dominujący wkład do sumy statystycznej pochodzi od metryki będącej rozwiązaniem klasycznych równań ruchu, sumę statystyczną przybliżyć można jako

$$Z = \int Dg e^{-S_g} \approx e^{-S_g}, \tag{2.31}$$

gdzie S_g jest działaniem grawitacyjnym w przestrzeni Euklidesowej.

Mając (2.31), możemy znaleźć energię swobodną F: $\beta F = -\ln Z$. Entropia wynosi

$$S = \frac{\partial}{\partial T}(T \ln Z). \tag{2.32}$$

Dla metryki Schwarzchilda, stosując powyższy rachunek otrzymujemy temperaturę

$$T = \frac{1}{8\pi GM} \tag{2.33}$$

i entropię daną przez (2.30).

2.3.2 Czarna dziura RNadS i czarna brana o niezerowej temperaturze

Ponieważ stany termiczne po stronie grawitacyjnej korespondencji AdS/CFT reprezentowane są przez rozwiązania z obecnością horyzontu, warto w tym miejscu przedyskutować pewne ogólne cechy rozwiązań opisujących czarne dziury w przestrzeni AdS.

Rozważmy działanie grawitacyjne z ujemną stałą kosmologiczną i członem z polem elektromagnetycznym

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^{d+1}x\sqrt{-g}\left(R - F^2 + \frac{d(d-1)}{L^2}\right), \tag{2.34}$$

gdzie R jest skalarem Ricciego, F_{AB} tensorem pola elektromagnetycznego, natomiast L oznacza skalę charakterystyczną związana ze stałą kosmologiczną $\Lambda = -d(d-1)/L^2$. Rozwiązaniem równań ruchu wynikających z (2.34), jest metryka opisująca naładowaną czarną dziurę w AdS, tzw czarną dziurę RNadS [34]:

$$\mathrm{d}s^2 = -V(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{V(r)} + r^2\mathrm{d}\Omega^2_{d-1}. \tag{2.35}$$

W powyższym wzorze Ω^2_{d-1} oznacza metrykę $d-1$ wymiarowej, jednostkowej sfery, natomiast $V(r)$ wynosi

$$V(r) = 1 - \frac{m}{r^{d-2}} + \frac{q^2}{r^{2d-4}} + \frac{r^2}{L^2}, \tag{2.36}$$

Parametr m i q w (2.35) związane są z masą ADM czarnej dziury M i jej ładunkiem relacjami

$$M = \frac{(d-1)\omega_{d-1}}{16\pi G}m, \tag{2.37}$$

$$Q = \frac{\omega_{d-1}q}{8\pi G}\sqrt{2(d-1)(d-2)}, \tag{2.38}$$

gdzie ω_{d+1} jest objętością jednostkowej $d-1$-sfery. Pozycja horyzontów zdarzeń (wewnętrznego i zewnętrznego) dana jest równaniem $V(r) = 0$. W szczególności, horyzont zewnętrzny r_+ jest największym dodatnim pierwiastkiem tego równania. Horyzont ten jest nieosobliwy o ile

$$\frac{d}{d-2}r_+^{2d-2} + L^2 r_+^{2d-4} \geq q^2L^2. \tag{2.39}$$

Nierówność (7.6) narzuca wiąz na parametr m uzależniając jego wartość minimalną od wartości q i L: $m \geq m_e(q,L)$. W granicy ekstremalnej $m = m_e(q,L)$, a oba horyzonty pokrywają się. Jednakże, w przypadku teorii supersymetrycznej zamiast relacji $m \geq m_e(q,L)$ mamy wymóg $m \geq 2q$, przy czym rozwiązanie $m = 2q$ odpowiada stanowi BPS. Można łatwo sprawdzić, że masa ekstremalna m_e jest (dla skończonych L) zawsze większa od $2q$. Z tego też powodu rozwiązanie ekstremalne nie jest supersymetryczne.

Z punktu widzenia korespondencji AdS/CFT interesujący jest przypadek graniczny, w którym konforemnym brzegiem czasoprzestrzeni jest $\mathbb{R}^d$ zamiast $\mathbb{R} \times S^{d-1}$. Odpowiada to tzw. „granicy nieskończonej objętości”. W tym celu przeskalujmy r, t, m, q o potęgi bezwymiarowego parametru α [34]

$$r \to \alpha^{1/d} r, \quad t \to \alpha^{-1/d} t, \quad m \to \alpha m, \quad q \to \alpha^{(d-1)/d} q \tag{2.40}$$

i równocześnie przeskalujmy

$$L^2 \mathrm{d}\Omega_{d-1}^2 \to \alpha^{-2/d} \sum_{i=1}^{d-1} \mathrm{d}x_i^2. \tag{2.41}$$

W granicy $\alpha \to \infty$ metryka (2.35) przybiera postać

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{r^2}{L^2} H(r) \mathrm{d}t^2 + \frac{L^2}{r^2} \frac{\mathrm{d}r^2}{H(r)} + \frac{r^2}{L^2} \sum_{i=1}^{d-1} \mathrm{d}x_i^2, \tag{2.42}$$

przy czym

$$H(r) = 1 - \frac{mL^2}{r^d} + \frac{q^2 L^2}{r^{2d-2}}. \tag{2.43}$$

Powyższa metryka opisuje rozwiązanie naładowanej czarnej brany o niezerowej temperaturze. Łatwo sprawdzić, że w granicy $m \to 0$, $q \to 0$ metryka (2.42) redukuje się do metryki „czystego” AdS (2.13).

2.4 Dualność płynowo-grawitacyjna

Dotychczas dyskutowaliśmy ogólne związki pomiędzy konforemną teorią Yanga-Millsa z grupą cechowania $SU(N)$, a teorią strun IIB. W przybliżeniu hydrodynamicznym, silnie sprzężona teoria Yanga-Millsa jest dualna do semiklasycznej teorii grawitacji. W szczególności, istnieją związki pomiędzy relatywistycznym równaniem Naviera-Stokesa, a równaniami wynikającymi z zachowania holograficznego tensora energii-pędu w przestrzeni o większym wymiarze. Podobnie, hydrodynamiczne równania zachowanych prądów mają swe grawitacyjne odpowiedniki. Korespondencja ta nosi nazwę dualności płynowo grawitacyjnej [25].

Przykładowo, przywołując (2.25) widzimy, że metryka będąca rozwiązaniem równań grawitacji, jest źródłem dla tensora-energii pędu silnie sprzężonej teorii Yanga-Millsa na brzegu. Równania wyrażające jego prawa zachowania, mają zatem interpretację równań hydrodynamiki.

Warto w tym momencie nadmienić, iż relatywistyczna hydrodynamika jest efektywnym opisem dowolnej teorii kwantowej z oddziaływaniem w sytuacji, gdy odstępstwa ze stanu równowagi są dostatecznie małe. Kluczowym jest w tym miejscu fakt, iż możemy uważać układ za bliski równowadze, w której jest w stanie płynu doskonałego. Bliskość oznacza również, że wszelkie poprawki reprezentujące odstępstwa od tego stanu, związane z procesami transportu, są dostatecznie małe[7]. Przykładowo tensor energii-pędu wyraża się jako suma następujących wkładów: tensora energii-pędu dla płynu doskonałego oraz tensorów wnoszących wkłady dyssypacyjne. Wszystkie one dają się skonstruować w postaci szeregów rozwinięć gradientowych, przy pomocy formalizmu AdS/CFT z dualnej geometrii.

W tym miejscu zadać można pytanie o zbieżność tak skonstruowanego szeregu. W pracy [43] pokazano, studiując numerycznie wysokie rzędy rozwinięć gradientowych tensora energii-pędu dla przepływu Bjorkena, że w istotnie szereg rozwinięć gradientowych ma zerowy promień zbieżności. Dalej okazuje się, że wychodząc z arbitralnych warunków początkowych, dalekich od stanu równowagi, po krótkim czasie układ można już opisywać w języku hydrodynamiki. Usprawiedliwia to przybliżenie hydrodynamiczne jako użyteczną metodę modelowania skomplikowanych, silnie oddziałujących układów.

W przypadku silnie sprzężonej teorii Yanga-Millsa, w granicy dużego N w przybliżeniu hydrodynamicznym, wartości tensora energii-pędu czy zachowanych prądów możemy otrzymać z równań klasycznej, ogólnej teorii względności. Jednym z głównych celów niniejszej pracy będzie grawitacyjna rekonstrukcja podstawowych wielkości hydrodynamicznych, dla teorii dualnych do hydrodynamiki z i bez zachowanych prądów.

[7]Zakładamy tutaj dodatkowo, że wpływ niehydrodynamicznych stopni swobody jest zaniedbywalny.

Rozdział 3

Elementy relatywistycznej hydrodynamiki

3.1 Płyny relatywistyczne

Zgodnie z (2.1.3), relatywistyczna hydrodynamika jest dobrym przybliżeniem układów kwantowych w sytuacji, gdy ograniczamy się do skal znacznie większych od średniej drogi swobodnej związanej z oddziaływaniem. W tym przypadku możemy zaniedbać szczegóły skomplikowanej natury oddziaływań, zastępując go fenomenologicznym opisem hydrodynamiki relatywistycznego płynu. Równania hydrodynamiki otrzymujemy z praw zachowania tensora energii-pędu $T^{\mu\nu}$ oraz ewentualnych, zachowanych prądów J_I^μ [8, 10]:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \tag{3.1}$$

$$\nabla_\mu J_I^\mu = 0, \tag{3.2}$$

przy czym indeks I odnosi się do wielkości zachowanej, stowarzyszonej z prądem J_I^μ. Dla układów bliskich stanowi równowagi ogólną postać wielkości hydrodynamicznych przedstawić można w postaci szeregów rozwinięć perturbacyjnych, w którym wiodący wkład zerowego rzędu odpowiada stanowi globalnej równowagi termodynamicznej, natomiast człony kolejnych rzędów reprezentują procesy dyssypacyjne.

Człon zerowego rzędu odpowiada przypadkowi płynu doskonałego. W ogólności układ scharakteryzowany jest przez następujące wielkości hydrodynamiczne: lokalną temperaturę T, ciśnienie p, gęstość energii ρ, wektor czteroprędkości związany z elementem płynu u_μ oraz ewentualne dodatkowe, ładunki q_I i potencjały chemiczne μ_I. Wektor czteroprędkości unormowany jest w standardowy sposób

$$u^\mu u_\mu = -1. \tag{3.3}$$

Wyobraźmy sobie następnie, że nieznacznie zaburzamy układ ze stanu równowagi. Pomimo, że układ jako całość nie jest w stanie równowagi, ze względu na to, że zaburzenie jest niewielkie, zidentyfikować można rejony (domeny), na których osiągany jest stan lokalnej równowagi termodynamicznej [10]. Dzięki temu na domenach tych możemy zdefiniować wartości wielkości termodynamicznych. Fakt iż odstępstwo od stanu równowagi jest niewielkie implikuje, że zmiana ich wartości dla sąsiednich domen jest również mała. W ten sposób funkcje termodynamiczne promowane są do zależnych od współrzędnych, wolnozmiennych pól hydrodynamicznych. Wolnozmienność oznacza również, iż ich pochodne są małe w porównaniu do skali wyznaczanej przez typowy zasięg oddziaływań teorii. Przykładowo, dla gęstości energii ρ, mamy

$$|\partial\rho| \ll \rho/\lambda. \tag{3.4}$$

W ten sposób pochodna danej wielkości jest małą pierwszego rzędu w porównaniu z samą wielkością; drugie pochodne zadają małe drugiego rzędu itd. Formalizm rozwinięć gradientowych daje prostą i systematyczną metodę konstrukcji wielkości zachowanych: mianowicie wypisujemy wszystkie możliwe człony, które można zgodnie z daną symetrią skonstruować z pochodnych podstawowych wielkości hydrodynamicznych do zadanego rzędu włącznie, a następnie budujemy szukaną wielkość jako kombinację takich członów. Współczynniki pojawiające się w tej kombinacji od pierwszego rzędu włącznie są współczynnikami transportu, związanymi z procesami dyssypacyjnymi [10]. Przykładowo, tensor energii-pędu do pierwszego rzędu zbudowany jest z wszystkich możliwych symetrycznych tensorów zawierających nie więcej niż jedną pochodną. Mając $T^{\mu\nu}$ oraz J_I^μ można wypisać równania hydrodynamiki (3.1) (3.2), a następnie wyprowadzić równanie stanu. Równanie to łączy wielkości intensywne p, T i μ_I z czteroprędkością u_μ oraz wielkościami ekstensywnymi: lokalną gęstością energii ρ i zachowanymi ładunkami q_I.

Obok $T^{\mu\nu}$ i J_I^μ użyteczną wielkością jest prąd entropii S^μ [8] (zob. także [50, 44]), będącym uogólnieniem pojęcia entropii na przypadek stanów nierównowagowych. Prąd ten definiujemy żądając, by w stanie równowagi termodynamicznej jego zerowa składowa w układzie współporuszającym się z elementem płynu reprodukowała gęstość entropii s oraz by dywergencja prądu entropii, określona na rozwiązaniach równań hydrodynamiki, była nieujemna.

Przyjrzymy się teraz konstrukcji $T^{\mu\nu}$, J^μ oraz S^μ dla układu w rozwinięciu gradientowym. Niech $T_{(0)}^{\mu\nu}$ oznacza tensor energii-pędu w zerowym rzędzie co odpowiada przypadkowi płynu doskonałego. Tensor ten sparametryzowany jest przez dwie wielkości: ρ i p i wynosi

$$T_{(0)}^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + p(h^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu). \tag{3.5}$$

W powyższym wzorze $h^{\mu\nu}$ oznacza metrykę. Użyliśmy tego symbolu ze względu na fakt iż g_{AB} zarezerwowane będzie dla $d+1$-wymiarowej metryki przestrzeni dualnej, której odpowiadać będzie d-wymiarowa metryka tła dla teorii pola $h_{\mu\nu}$. W celu uproszczenia późniejszego rachunku, wygodnie jest w tym miejscu zdefiniować projektor na kierunki transwersalne do czteroprędkości

$$P^{\mu\nu} := h^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu. \tag{3.6}$$

Łatwo sprawdzić, że

$$P^{\mu\nu} u_\mu = 0, \quad P^{\mu\rho} P_{\rho\nu} = P^\mu_\nu, \quad P^\mu_\mu = d - 1. \tag{3.7}$$

Używając definicji (3.6), postać (3.5) można przepisać jako

$$T_{(0)}^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + p P^{\mu\nu}. \tag{3.8}$$

Jeśli dodatkowo mamy zachowane ładunki, będziemy mieć również odpowiadające im, zachowane prądy. W wiodącym rzędzie każdy z tych prądów ma postać:

$$J_{I(0)}^{\mu} = q_I u^\mu. \tag{3.9}$$

Zerowe składowe czterowektorów prądów reprezentują gęstości zachowanych ładunków w układzie współporuszającym się z elementem płynu. W analogiczny sposób wkład wiodący do prądu entropii wynosi

$$S^{\mu}_{(0)} = su^{\mu}, \tag{3.10}$$

co implikuje (na mocy $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu}_{(0)} = 0$)

$$\nabla_{\mu} S^{\mu}_{(0)} = 0. \tag{3.11}$$

Warto w tym miejscu podkreślić, że ostatnia równość spełniona jest jedynie dla części w zerowym rzędzie $S^{\mu}_{(0)}$.

Przyjrzyjmy się teraz wyższym rzędom rozwinięcia gradientowego. Dla $T^{\mu\nu}$, $J_I{}^{\mu}$ i S^{μ} mamy:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \rho u^{\mu} u^{\nu} + pP^{\mu\nu} + \epsilon\, T^{\mu\nu}_{(1)} + \epsilon^2\, T^{\mu\nu}_{(2)} + ... = \rho u^{\mu} u^{\nu} + pP^{\mu\nu} + \Pi^{\mu\nu}, \\ J_I{}^{\mu} &= q_I u^{\mu} + \epsilon\, J_I{}^{\mu}_{(1)} + \epsilon^2\, J_I{}^{\mu}_{(2)} + ... = q_I u^{\mu} + \Upsilon^{\mu}_I, \\ J_S{}^{\mu} &= su^{\mu} + \epsilon\, S^{\mu}_{(1)} + \epsilon^2\, S^{\mu}_{(2)} + ... \end{aligned} \tag{3.12}$$

Za [10], w powyższych wzorach oznaczyliśmy człony dyssypacyjne w $T^{\mu\nu}$ i J^{μ}_I jako:

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} &:= \epsilon\, T^{\mu\nu}_{(1)} + \epsilon^2\, T^{\mu\nu}_{(2)} + ..., \\ \Upsilon^{\mu}_I &= \epsilon\, J_I{}^{\mu}_{(1)} + \epsilon^2\, J_I{}^{\mu}_{(2)} + ... \end{aligned} \tag{3.13}$$

W powyższych wzorach ϵ są małymi pierwszego rzędu, które numerują poszczególne rzędy rozwinięcia gradientowego. Zakładamy przy tym, że fluktuacje ze stanu równowagi są na tyle małe, że wprowadzone wyżej szeregi rozwinięć gradientowych są zbieżne. W niniejszej pracy ograniczmy się do drugiego rzędu włącznie. Wszystkie poprawki związane z procesami transportu będą konstruowane z pochodnych czteroroprędkości, temperatury oraz zachowanych ładunków.

Budując $T^{\mu\nu}$ czy $J_I{}^{\mu}$ w danym rzędzie wypisujemy wszelkie możliwe, acz dopuszczone przez rozważaną symetrię wielkości, dające się skonstruować z zadanej (odpowiadającym danemu rzędowi) ilości pochodnych. Dotyczy to również prądu entropii. Z uwagi na to, że opisujemy stan nierównowagowy, prąd ten nie będzie już jednak zachowany. Druga zasada termodynamiki wymaga jednak by, na rozwiązaniach hydrodynamiki

$$\nabla_{\mu} J_S{}^{\mu} \geq 0. \tag{3.14}$$

Pominiemy na razie szczegóły dotyczące konstrukcji prądu entropii w wyższych rzędach rozwinięcia gradientowego i rozważmy ogólną postać członów dyssypacyjnych w J_I^μ i $T^{\mu\nu}$. W przypadku relatywistycznych płynów człony te opisują zjawiska związane z transportem energii i pędu. W przypadku płynu idealnego czteroprędkość u_μ została tak wybrana, że w lokalnym układzie współporuszającym się z elementem płynu, składowe tensora energii-pędu równoległe do czteroprędkości pozwalają otrzymać (lokalną) gęstość energii. W przypadku efektów związanych z rozpraszaniem energii (pędu), wygodnie jest przenieść powyższe warunki na wyższe rzędy rozwinięcia gradientowego. Wybierając układ Landaua, zakładamy spełnienie następujących warunków

$$\Pi^{\mu\nu} u_\mu = 0, \quad \Upsilon^\mu u_\mu = 0 \tag{3.15}$$

Innymi słowy w układzie Landaua czteroprędkość zdefiniowana jest w ten sposób, że poprawki reprezentujące człony dysypacyjne są do niej ortogonalne. Mając to na uwadze, wygodnie jest rozłożyć pochodne czteroprędkości na części podłużne i transwersalne:

$$\nabla^\nu u^\mu = -u^\alpha u^\nu \nabla_\alpha u^\mu + \sigma^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{d-1} P^{\mu\nu}. \tag{3.16}$$

W powyższym wzorze zdefiniowano

$$\begin{aligned} \theta &= \nabla_\mu u^\mu, \\ \sigma^{\mu\nu} &= P^{\mu\alpha} P^{\nu\beta} \nabla_{(\alpha} u_{\beta)} - \frac{1}{d-1} \theta P^{\mu\nu}, \\ \omega^{\mu\nu} &= P^{\mu\alpha} P^{\nu\beta} \nabla_{[\alpha} u_{\beta]} \end{aligned} \tag{3.17}$$

przy czym (...) oraz [...] oznaczają odpowiednio symetryzacje i antysymetryzacje:

$$\begin{aligned} S_{(\alpha\beta)} &:= S_{\alpha\beta} + S_{\beta\alpha}, \\ A_{(\alpha\beta)} &:= A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Tensory $\sigma^{\mu\nu}$ i $\omega^{\mu\nu}$ są odpowiednio symetrycznym i antysymetrycznym, transwersalnym, bezśladowym tensorem w pierwszym rzędzie:

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu} = \sigma^{\nu\mu} \quad &, \sigma^{\mu\nu} u_\nu = 0, \quad {\sigma_\mu}^\mu = 0, \\ \omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu} \quad &\omega^{\mu\nu} u_\nu = 0, \quad {\omega_\mu}^\mu = 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Aby ograniczyć liczbę możliwych członów, jakie można wypisać w danym rzędzie, odwołać się można do równań hydrodynamiki z rzędu niższego. Przykładowo, konstruując ogólną postać $T^{\mu\nu}_{(1)}$ w pierwszym rzędzie, wykorzystać można równania wynikające z praw zachowania $T^{\mu\nu}_{(0)}$ i $J_{I(0)}^{\mu}$. Równania te wydatnie ograniczają liczbę możliwych wkładów w danym rzędzie.

Mając na uwadze zaprezentowaną właśnie konstrukcję, człony dyssypacyjne w tensorze energii-pędu w pierwszym rzędzie – $\Pi^{\mu\nu}_{(1)}$, możemy przedstawić jako:

$$\Pi^{\mu\nu}_{(1)} = -2\eta\sigma^{\mu\nu} - \zeta\theta P^{\mu\nu}, \tag{3.20}$$

gdzie η i ζ oznaczają współczynniki transportu w pierwszym rzędzie (są to lepkości). Podobnie

$$\Upsilon^{\mu}_{(1)I} = -\tilde{\kappa}_{IJ} P^{\mu\nu}\nabla_{\nu} q_J - \tilde{\gamma}_I P^{\mu\nu}\nabla_{\nu}\rho - \mho_I l^{\mu}. \tag{3.21}$$

W powyższym wzorze l^{μ} jest pseudowektorem zbudowanym z pierwszej pochodnej czteroprędkości postaci[1]

$$l^{\mu} = \epsilon^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho} u^{\nu} \mathcal{D}^{\lambda} u^{\rho}, \tag{3.22}$$

natomiast $\mho_I$, $\tilde{\kappa}_{IJ}$ oraz $\tilde{\gamma}_I$ są współczynnikami transportu. Współczynniki $\tilde{\kappa}_{IJ}$ są macierzami dyfuzji związanej z ładunkiem q_I, podczas gdy $\tilde{\gamma}_I$ wnoszą wkład do prądu J_I^{μ} pochodzący od gęstości ładunku. Analogicznie, w drugim rzędzie w rozwinięciu J_I^{μ} dojdą wyrazy zbudowane z drugich pochodnych q_I, ρ, u_{μ} oraz iloczynów pierwszych pochodnych. Ostatecznie więc, biorąc pod uwagę postaci $T^{\mu\nu}$ i J_I^{μ} w otrzymanych rozwinięciach gradientowych znajdziemy zbiór współczynników transportu, które należy ustalić. Jednym z istotniejszych aspektów niniejszej pracy będzie zrekonstruowanie tych współczynników przy użyciu formalizmu AdS/CFT.

3.2 Płyny konforemne

Rozważmy supersymetryczną, konforemną $\mathcal{N} = 4$ SYM, określoną na d-wymiarowej czasoprzestrzeni z metryką $h_{\mu\nu}$. Jak pamiętamy, teoria ta jest dualna do supergrawitacji typu

[1] W symbolu całkowicie antysymetrycznym $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ włączony został pierwiastek z wyznacznika metryki $\sqrt{-\det h_{\mu\nu}}$.

IIB na przestrzeni $AdS_5 \times S^5$. Wygodnym opisem teorii konforemnie-niezmienniczej jest tzw. formalizm Weyl-niezmienniczy [29]. W formalizmie tym można łatwo konstruować wielkości, które transformują się jednorodnie pod wpływem transormacji konforemnych.

Metryka $h_{\mu\nu}$ jest przykładem tensora o wadze Weyla -2. Oznacza to, że pod wpływem transformacji skalowania, przekształca się ona w następujący sposób

$$h_{\mu\nu} \to e^{-2\phi(x)} h_{\mu\nu}, \tag{3.23}$$

gdzie $\phi(x)$ - funkcja skalarna. Wykorzystując warunek unormowania czteroprędkości

$$h_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1, \tag{3.24}$$

łatwo pokazać, że u_μ ma wagę -1, tj.

$$u_\mu \to e^{\phi(x)} u_\mu. \tag{3.25}$$

Dodatkowo, symetria konforemna implikuje następujące przekształcenia tensora energii-pędu i zachowanego prądu [29]

$$T^{\mu\nu} \to e^{-(d+2)\phi(x)} T^{\mu\nu}, \quad J_I^\mu \to e^{-w_I \phi(x)} J_I^\mu. \tag{3.26}$$

Mimo, że $T^{\mu\nu}$ oraz J_I^μ transformują się jednorodnie pod wpływem transformacji Weyla, same równania $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ i $\nabla_\mu J_I^\mu = 0$ mają już nietrywialne własności transformacyjne. Podobnie, pochodna kowariantna czteroprędkości nie przekształca się jednorodnie pod wpływem transformacji Weyla:

$$\nabla_\mu u^\nu = \partial_\mu u^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}{}^\nu u^\lambda \to e^{-\phi} \Big[\nabla_\mu u^\nu + \delta_\mu^\nu u^\sigma \partial_\sigma \phi - g_{\mu\lambda} u^\lambda g^{\nu\sigma} \partial_\sigma \phi \Big]. \tag{3.27}$$

By uniknąć związanych z tym trudności, a także by uprościć dalszy rachunek, wygodnie jest wprowadzić koneksję Weyla, którą za [29] definiujemy jako

$$\mathcal{A}_\nu := a_\nu - \frac{\theta}{d-1} u_\nu, \tag{3.28}$$

przy czym

$$\theta := \nabla_\mu u^\mu, \quad a_\nu := u^\mu \nabla_\mu u_\nu. \tag{3.29}$$

Koneksja $\mathcal{A}_\mu$ nie przekształca się jednorodnie pod wpływem transormacji Weyla,

$$\mathcal{A}_\nu \to \mathcal{A}_\nu + \partial_\nu \phi, \tag{3.30}$$

dzięki czemu pozwala ona zdefiniować Weyl-kowariantną pochodną $\mathcal{D}_\mu$, która ma już szczególnie proste własności transformacyjne: pochodna Weyla wielkości o wadze w, jest wielkością o tej samej wadze. Definiując $\mathcal{D}_\mu$ żądamy by

$$\begin{gathered} \mathcal{D}_\lambda h_{\mu\nu} = 0, \\ \mathcal{D}_\lambda u^\mu = 0, \quad u^\lambda \mathcal{D}_\lambda u^\mu = 0 \end{gathered} \tag{3.31}$$

Warunki te jednoznacznie zadają postać pochodnej Weyla o wspomnianych własnościach transformacyjnych. Dla wielkości Q^μ_ν o wadze w mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\lambda Q^\mu_\nu &:= \nabla_\lambda Q^\mu_\nu + w\mathcal{A}_\lambda Q^{\mu\ldots}_{\nu\ldots} + \\ &+ [h_{\lambda\alpha}\mathcal{A}^\mu - \delta^\mu_\lambda \mathcal{A}_\alpha - \delta^\mu_\alpha \mathcal{A}_\lambda] Q^{\alpha\ldots}_{\nu\ldots} + \ldots \\ &- [h_{\lambda\nu}\mathcal{A}^\alpha - \delta^\alpha_\lambda \mathcal{A}_\nu - \delta^\alpha_\nu \mathcal{A}_\lambda] Q^\mu_\alpha + \ldots \end{aligned} \tag{3.32}$$

W terminach (3.32) równania zachowania tensora energii-pędu i prądów przybierają identyczną postać jak w przypadku pochodnej kowariantnej:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \mathcal{D}_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad \nabla_\mu J^\mu = \mathcal{D}_\mu J^\mu = 0. \tag{3.33}$$

Przy użyciu pochodnej Weyla łatwo jest budować wielkości transformujące się jednorodnie pod wpływem przekształceń Weyla. Przykładowo, $\sigma_{\mu\nu}$ i $\omega_{\mu\nu}$ dane przez (3.17), można wyrazić jako

$$\sigma_{\mu\nu} := \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu u_\nu + \mathcal{D}_\nu u_\mu), \quad \omega_{\mu\nu} := \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu u_\nu - \mathcal{D}_\nu u_\mu) \tag{3.34}$$

W ich terminach:

$$\mathcal{D}_\mu u^\nu = {\sigma_\mu}^\nu + {\omega_\mu}^\nu \to e^{-\phi}\mathcal{D}_\mu u^\nu \tag{3.35}$$

Wykorzystując raz jeszcze definicję pochodnej Weyla, dostaniemy w drugim rzędzie następujące własności transformacyjne [29]

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu u^\lambda &= \mathcal{D}_\mu {\sigma_\nu}^\lambda + \mathcal{D}_\mu {\omega_\nu}^\lambda \to e^{-\phi} \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu u^\lambda, \\
\mathcal{D}_\lambda \sigma_{\mu\nu} &= \nabla_\lambda \sigma_{\mu\nu} + \mathcal{A}_\lambda \sigma_{\mu\nu} + \mathcal{A}_\mu \sigma_{\lambda\nu} + \mathcal{A}_\nu \sigma_{\mu\lambda} - h_{\mu\lambda} \mathcal{A}^\alpha \sigma_{\alpha\nu} - h_{\mu\lambda} \mathcal{A}^\alpha \sigma_{\alpha\nu} - h_{\nu\lambda} A^\alpha \sigma_{\mu\alpha} \\
&\to e^{\phi} \mathcal{D}_\lambda \sigma_{\mu\lambda}, \\
\mathcal{D}_\lambda \omega_{\mu\nu} &= \nabla_\lambda \omega_{\mu\nu} + \mathcal{A}_\lambda \omega_{\mu\nu} + \mathcal{A}_\mu \omega_{\lambda\nu} + \mathcal{A}_\nu \sigma_{\mu\lambda} - h_{\mu\lambda} \mathcal{A}^\alpha \omega_{\alpha\nu} - h_{\mu\lambda} \mathcal{A}^\alpha \omega_{\alpha\nu} - h_{\nu\lambda} A^\alpha \omega_{\mu\alpha} \\
&\to \mathcal{D}_\lambda \omega_{\mu\lambda}
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

Temperatura i potencjały chemiczne nie są Weyl-niezmienncze, jednak przekształcają się jednorodnie:

$$
T \to e^{-\phi} T, \quad \mu_I \to e^{-\phi} \mu_I \tag{3.37}
$$

Wielkości T, μ_I, $\sigma_{\mu\nu}$, $\omega_{\mu\nu}$ oraz ich pochodne mogą zostać użyte do konstrukcji wygodnej bazy skalarów, wektorów i tensorów, przekształcających się jednorodnie pod wpływem transformacji Weyla (w tym celu niezbędne są niekiedy odpowiednie zwężenia z u_μ, symetryzacje itp). Nie są to jednak wszystkie Weyl-niezmiennicze obiekty, jakie można skonstruować do drugiego rzędu włącznie.

Niech V_μ będzie wektorem o wadze w, tj. $V_\mu \to e^{-w\phi} V_\mu$. Komutator pochodnych Weyla, działając na wektor V_μ, przekształca się jednorodnie pod wpływem tych transformacji. W szczególności, możemy przedstawić go jako

$$
[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] V_\lambda = w \mathcal{F}_{\mu\nu} V_\lambda + {\mathcal{R}_{\mu\nu\lambda}}^\alpha V_\alpha, \tag{3.38}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mu\nu} &= \nabla_\mu \mathcal{A}_\nu - \nabla_\mu \mathcal{A}_\nu, \\
\mathcal{R}_{\mu\nu\lambda\sigma} &= R_{\mu\nu\lambda\sigma} + \mathcal{F}_{\mu\nu} h_{\lambda\sigma} - \delta^\alpha_{[\mu} h_{\nu][\lambda} \delta^\beta_{\sigma]} \left(\nabla_\alpha \mathcal{A}_\beta + \mathcal{A}_\alpha \mathcal{A}_\beta - \frac{\mathcal{A}^2}{2} h_{\alpha\beta} \right),
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

natomiast $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$ jest tensorem Riemanna. Zarówno $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ jak i ${\mathcal{R}_{\mu\nu\lambda}}^\alpha$, są Weyl-niezmiennicze (waga Weyla $w = 0$). Innymi tensorami przekształcającymi się jednorodnie względem transformacji Weyla są:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\mu\nu} &:= {\mathcal{R}_{\mu\alpha\nu}}^\alpha = R_{\mu\nu} + (d-2)(\nabla_\mu \mathcal{A}_\nu + \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu - \mathcal{A}^2 g_{\mu\nu}) + h_{\mu\nu} \nabla_\lambda \mathcal{A}^\lambda + \mathcal{F}_{\mu\nu}, \\
\mathcal{R} &:= \mathcal{R}_\alpha^{\ \alpha} = R - 2(d-1) \nabla_\lambda \mathcal{A}^\lambda + (d-2)(d-1) \mathcal{A}^2.
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

W powyższych definicjach $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ jest Weyl niezmienniczy, natomiast $\mathcal{R}$ ma wagę $w = +2$ (jako zwężenie tego ostatniego). Bardziej szczegółowa analiza opisanych tu zagadnień znajduje się w [29] oraz [26]. W niniejszej pracy przyjęto konwencję dotycząca znaku w tensorze Riemanna, tożsamą z [26] (co implikuje różnice w znaku w członach krzywiznowych w porównaniu do [29]). Ostatnim tensorem, istotnym w toku dalszych obliczeń jest tensor Weyla, zdefiniowany w standardowy sposób

$$C_{\mu\nu\lambda\sigma} = R_{\mu\nu\lambda\sigma} - \frac{1}{d-2}\left(h_{\mu[\lambda}R_{\sigma]\nu} - h_{\nu[\lambda}R_{\sigma]\mu}\right) + \frac{1}{(d-1)(d-2)}Rh_{\mu[\lambda}h_{\sigma]\nu}. \tag{3.41}$$

Rozdział 4

Horyzonty

4.1 Powierzchnie złapane i horyzonty kwazilokalne

Zgodnie z ogólnymi rozważaniami zaprezentowanymi w Rozdziale 2 istnieje dualność pomiędzy klasą teorii pola, a rozwiązaniemi grawitacyjnymi w przestrzeni o większym wymiarze. W szczególności pokazaliśmy, że własności termiczne silnie sprzęzonego układu opisywanego supersymetryczną, konforemną teorią $\mathcal{N} = 4$ SYM tłumaczą się na rozwiązania postaci czarnej dziury w przestrzeni asymptotycznie AdS. Zbadanie ich struktury przyczynowej, a w szczególności wyznaczenie pozycji samych horyzontów jest zatem istotnym elementem formalizmu holograficznego opisu stanów hydrodynamicznych. W opisie tym stanom bliskim równowadze odpowiadają dualne geometrie z wolnozmiennymi horyzontami.

Ważną rolę w fizyce czarnych dziur odgrywają horyzonty kwazilokalne, których najlepszym przykładem jest horyzont pozorny. Zdefiniowane są one w terminach powierzchni złapanych i marginalnie złapanych. W obu przypadkach termin „powierzchnia" oznacza $d-1$-wymiarową hiperpowierzchnię Ω w $d+1$ wymiarowej czasoprzestrzeni. Przestrzeń normalna do tego typu powierzchni jest rozpięta przez parę zerowych wektorów ℓ and n. W toku dalszej dyskusji ograniczymy się do przypadku, w którym oba te wektory zorientowane są w przyszłość w sensie parametru afinicznego wzdłuż geodezyjnej obserwatora spadającego w polu grawitacyjnym dziury, przy czym ℓ jest zewnętrzny, a n wewnętrzny do rozważanej hiperpowierzchni. Dodatkowo wygodnie jest przyjąć następującą normalizację

$$\ell \cdot n = -1. \tag{4.1}$$

Metryka indukowana na Ω, może być przedstawiona jako

$$\tilde{q}_{ab} = g_{ab} + \ell_a n_b + \ell_b n_a \,. \tag{4.2}$$

Zewnętrzne i wewnętrzne zerowe ekspansje Ω wynoszą odpowiednio

$$\theta_{(\ell)} = \tilde{q}^{ab}\nabla_a \ell_b = \mathcal{L}_\ell \log \sqrt{\tilde{q}} \text{ and } \theta_{(n)} = \tilde{q}^{ab}\nabla_a n_b = \mathcal{L}_n \log \sqrt{\tilde{q}}\,. \tag{4.3}$$

Ogólniej, dla dowolnego wektora $X = A\ell + Bn$, możemy to przepisać jako

$$\theta_{(X)} = A\theta_{(\ell)} + B\theta_{(n)}\,. \tag{4.4}$$

Z definicji Ω jest *zewnętrznie złapana* jeśli $\theta_{(\ell)} < 0$, *złapana* dla $\theta_{(\ell)} < 0$ i $\theta_{(n)} < 0$ oraz *niezłapana* w przypadku gdy $\theta_{(\ell)} = 0$ i $\theta_{(n)} < 0$. Ponadto Ω jest *marginalnie zewnętrznie złapana* jeśli $\theta_{(\ell)} = 0$ i *marginalnie złapana* dla $\theta_{(\ell)} = 0$ i $\theta_{(n)} < 0$. Powierzchnie złapane sygnalizują obecność czarnych dziur. Znane twierdzenia o osobliwościach łączą je z faktem istnienia osobliwości w przestrzeni oraz horyzontami zdarzeń [55]. Mogą być one również użyte do zdefiniowania horyzontu pozornego [55]. Wychodząc z foliacji czasoprzestrzeni zadanej poprzez zbiór hiperpowierzchni Σ_t (odpowiednio dla kolejnych chwil czasu t), można zdefiniować rejon złapany na każdej z Σ_t, jako połączenie wszystkich zewnętrznie złapanych powierzchni. Brzeg każdego z Ω_t jest marginalnie zewnętrznie złapanym rejonem[1], reprezentującym powierzchnię horyzontu pozornego. Horyzont pozorny można zatem wyznaczyć, rozpatrując następujące warunki

$$\theta_{(\ell)} = 0, \quad \theta_{(n)} < 0 \tag{4.5}$$

(dla l i n zorintowanych w przyszłość). W toku dalszej analizy przyjmiemy pewne nadużycie terminologii, odnosząc termin horyzont pozorny również do hiperpowierzchni Ω_t, ewoluujących w czasie.

W tym momencie warto wspomnieć o nieprzyczynowej naturze horyzontu zdarzeń, objawiającej się w opisie geometrii dynamicznych. Rozważmy przykładowo czarną dziurę

[1]Pomijamy tu pewne nieistotne szczegóły natury technicznej

absorbującą w skończonym czasie materię. Najprostszym rozwiązaniem odpowiadającym temu przypadkowi jest geometria Vaidya [72]. Można pokazać, że ekspansja horyzontu nie jest bezpośrednio rządzona przez pochłaniane przez dziurę porcje materii – proces ten spowalnia w istocie tempo wzrostu horyzontu. Ewolucja horyzontu zdarzeń jest więc nieprzyczynowa. Nie stanowi to problemu dopóki, dopóty nie łączymy z pojęciem horyzontu zdarzeń żadnych wielkości fizycznych, które byłyby w tym wypadku również nieprzyczynowe.

Jak zobaczymy w Rozdziale 7, ostatni fakt ma szczególne znaczenie w kontekście holograficznej rekonstrukcji prądu entropii. W metodzie tej, szukany prąd konstruujemy w oparciu o hiperpowierzchnię horyzontu. Ponieważ sama entropia jest (jak każda wielkość fizyczna) przyczynowa, problemy związane z brakiem lokalności i przyczynowości horyzontu zdarzeń stają się w tym momencie szczególnie istotne.

Z drugiej storny znane są alternatywne metody wyrażenia hiperpowierzchni reprezentujących granicę czarnych dziur, wprowadzające pojęcie tzw. horyzontów kwazilokalnych. Z matematycznego punktu widzenia najlepszym kandydatem na te horyzonty, wydają się być obszary foliowane przez marginalnie zewnętrzne, złapane powierzchnie. Zgodnie z [73], *słabo izolowanymi horyzontami* nazwiemy granice czarnych dziur, zadane przez o jeden wymiar mniejsze hiperpowierzchnie, foliowane przez marginalnie zewnętrzne powierzchnie. Powierzchnie te są blisko spokrewnione z horyzontami Killinga i mogą reprezentować granice stacjonarnych czarnych dziur bez odwoływania się do struktury przyczynowej lub śledzenia przyszłości obserwatorów w nieskończoności. Na każdej z tych powierzchni zachodzi

$$\theta_{(n)} < 0, \quad \mathcal{L}_n \theta_{(\ell)} < 0\,. \tag{4.6}$$

Zauważmy, że wewnętrzna ekspansja jest ujemna, natomiast pod wpływem małych, wewnętrznie zorientowanych deformacji, zewnętrzna ekspansja również staje się ujemna. Wynika stąd, że – zgodnie z oczekiwaniem – przyszłością każdego obserwatora znajdującego się wewnątrz rozważanego obszaru jest spotkanie z osobliwością.

Z klasycznej definicji wynika, że zależny od czasu horyzont pozorny jest wielkością uzależnioną od wyboru foliacji: różne jej wybory prowadzą do różnych horyzontów. Niejednoznaczność horyzontów pozornych została zademonstrowana w [74]. Dalej, przyglądając się ewolucji horyzontu można pokazać (zob. [75, 73]), że hiperpowierzchnia foliowana przez marginalnie zewnętrzne powierzchnie złapane nie jest sztywna i może być zdeformowana przy zachowaniu wszystkich jej własności. Fakt ten wykorzystamy przy konstrukcji horyzontu pozornego dla geometrii dynamicznych.

4.2 Horyzont zdarzeń dla geometrii wolnozmiennej

Rozważmy przypadek geometrii zawierającej rozwiązania postaci czarnej dziury z zależnym od czasu i przestrzeni horyzontem zdarzeń. Założymy przy tym, że pozycja horyzontu może być wyrażona w postaci szeregu potęgowego, w którym wiodący wyraz reprezentuje pozycje statycznego horyzontu, podczas gdy wyrazy wyższych rzędów wnoszą niewielkie, zależne od współrzędnych poprawki. Wszystkie one będą małe w sensie pewnego parametru skali, związanego z pozycją horyzontu w zerowym rzędzie r_0.

Sam horyzont zdarzeń będzie funkcją zależną od współrzędnych $r_H(x)$, przy czym r_0 jest wartością w ustalonym punkcie, przykładowo w $x = 0$. Przyjmiemy dodatkowo, iż funkcja ta jest wolnozmienna, a człony wyższych rzędów otrzymane z rozwinięcia w szereg Taylora wyrażenia $r_H(x)$ wokół ustalonego punktu reprezentują odstępstwa od przypadku statycznej geometrii. Wolnozmienność oznacza tutaj fakt, iż pochodne $r_H(x)$ są małe w porównaniu do skali wyznaczonej przez r_0: $r_0^{-1}\partial_\mu r_H \ll 1$. Jak wyjaśniono w [44] (zob. także [54, 50]), położenie horyzontu zdarzeń dla geometrii wolnozmiennej może być ustalone w oparciu o rachunek rozwinięć gradientowych przy wzięciu pod uwagę faktu, że jego pozycja we wiodącym rzędzie jest znana. Niech $S(x)$ oznacza funkcję skalarną, zadającą równanie hiperpowierzchni horyzontu zdarzeń. Kowektor normalny do powierzchni horyzontu wynosi

$$m = dS\,. \tag{4.7}$$

Ponieważ horyzont zdarzeń jest hiperpowierzchnią zerową, jego położenie może być znalezione z warunku

$$m^2 = 0. \tag{4.8}$$

W ogólności ostatnie równanie ma szeroką klasę rozwiązań, zadających rodzinę zerowych hiperpowierzchni. Ponieważ odstępstwo od postaci statycznego horyzontu jest z założenia niewielkie, horyzont wolnozmienny zidentyfikować można jako hiperpowierzchnię reprezentującą niewielkie zaburzenie pozycji statycznego horyzontu, pokrywające się z nim dla późnych czasów.

4.3 Horyzont pozorny dla geometrii wolnozmiennej

Zajmijmy się wyznaczeniem pozycji horyzontu pozornego wykorzystując, podobnie jak miało to miejsce w przypadku horyzontu zdarzeń, rachunek rozwinięć gradientowych i znaną pozycję horyzontu w zerowym rzędzie (zob. [54, 50]). Niech Δ oznacza zależny od czasu horyzont pozorny. Analizę rozpocznijmy od określenia pola wektorowego oznaczonego jako v, którego normalna do marginalnie zewnętrznej, złapanej powierzchni zadaje foliację horyzontu Δ. Najbardziej istotne w konstrukcji v są dwie własności: v jest styczny do Δ oraz spełnia warunek Frobeniusa

$$v \wedge dv = 0\,. \tag{4.9}$$

Spełnienie warunku Frobeniusa gwarantuje, że hiperpowierzchnia horyzontu będzie ortogonalna do m (a tym samym v zadaje foliację Δ). Ponieważ v jest styczny do Δ, zachodzi $v{\cdot}m = 0$. Obliczeniowo wygodnie jest przy tym przyjąć następującą normalizację wektora v[2]

$$m^2 + v^2 = 0\,. \tag{4.10}$$

Jak każdy kwazilokalny horyzont dynamiczny jest on przestrzenny, co implikuje, że m jest czasowe, podczas gdy v przestrzenne. Bez straty ogólności można założyć, że m jest skierowany w przyszłość, natomiast v jest zewnętrzny. Normalne do powierzchni o stałych S i v są postaci

$$\begin{aligned} v &= \ell - Cn \\ m &= \ell + Cn\,, \end{aligned} \tag{4.11}$$

[2]Normalizacja (4.10) okaże się szczególnie użyteczna w kontekście holograficznej rekonstrukcji prądu entropii.

gdzie skalar C oznacza tzw. parametr ewolucji [48, 73]. Biorąc pod uwagę normalizację (4.1), warunek (4.11) implikuje

$$C = \frac{1}{2}v^2 \,. \tag{4.12}$$

Znak parametru ewolucji informuje o tym, czy Δ jest przestrzenne, czasowe lub zerowe (przypadek $C = 0$). Znak współczynników (4.11) został wybrany w taki sposób, by zagwarantować, że oba ℓ i n są skierowane w przyszłość; przy czym ℓ jest zewnętrzny, podczas gdy n wewnętrzny.

By ustalić pozycję horyzontu pozornego należy obliczyć ekspansje (4.3). Zgodnie z (4.5), samo położenie horyzontu pozornego zadaje warunek

$$\theta_{(\ell)} = 0, \tag{4.13}$$

gdzie $\theta_{(\ell)}$ dane jest przez (4.3) Dodatkowo zachodzi $\theta_{(n)} < 0$ oraz $C \geq 0$.

Rozdział 5

Geometria dualna do hydrodynamiki w przypadku nienaładowanym

5.1 Rozwiązania równań ruchu

Geometria dualna do hydrodynamiki płynu w dowolnych wymiarach, przy braku jakichkolwiek innych zachowanych prądów oprócz tensora energii-pędu, jest rozwiązaniem równań Einsteina z ujemną stałą kosmologiczną $\Lambda = -d(d-1)/2$ [26]:

$$I_{d+1} = \frac{1}{16\pi G_N} \int \mathrm{d}^{d+1}x \sqrt{-g} \left\{ R - 2\Lambda \right\}, \tag{5.1}$$

gdzie G_N jest $(d+1)$-wymiarową stałą grawitacji, natomiast promień AdS został przyjęty za równy jeden. Wzór (5.1) pojawia się na gruncie teorii strun (dla $d = 2, 3, 4$ i 6, zob. [76]) i opisuje sektor dynamiki jednopunktowej funkcji operatora tensora energii-pędu dla klasy planarnych, silnie-sprzężonych, holograficznych, konforemnych teorii pola [26].

Dla wygody począwszy od tego rozdziału przyjmiemy następujące konwencje:

1. Duże łacińskie litery zarezerwowane będą dla $d+1$-wymiarowych indeksów,
2. Współrzędna $x^d = r$ reprezentuje radialną odległość od konforemnego brzegu,
3. Greckie litery reprezentują d-wymiarowe wskaźniki na konforemnym brzegu,
4. Metryka $h_{\mu\nu}$ oznaczać będzie d-wymiarową metrykę tła dla teorii pola na konforemnym brzegu $d+1$-wymiarowej, dualnej teorii grawitacji,

5. Małe łacińskie litery oznaczać będą wskaźniki na konforemnym brzegu z pominięciem współrzędnej czasowej.

Działanie (5.1) prowadzi do próżniowych równań Einsteina

$$G_{AB} - \frac{d(d-1)}{2} g_{AB} = 0, \tag{5.2}$$

gdzie G_{AB} oznacza tensor Einsteina pełnej $(d+1)$-wymiarowej metryki g_{AB} $(A, B = 1 \ldots d+1)$. Prostym rozwiązaniem (5.2) jest metryka (2.42) z $m = b^{-4}$, $L = 1$ i $q = 0$ (przypadek nienaładowany)

$$\mathrm{d}s^2 = -r^2 \left(1 - \frac{1}{(br)^d}\right) \mathrm{d}t^2 + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{(br)^d}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x^i \tag{5.3}$$

Przechodząc do układu Eddingtona Finkelsteina mamy

$$\mathrm{d}s^2 = -r^2 \left(1 - \frac{1}{(br)^d}\right) \mathrm{d}t^2 - 2\mathrm{d}t\mathrm{d}r + r^2 \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x^i. \tag{5.4}$$

Równoważnie, wprowadzając wektor $u_\mu = \{-1, 0, 0, 0\}$, przepisujemy (5.4) jako

$$\mathrm{d}s^2 = 2u_\mu \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}r - r^2 \left(1 - \frac{1}{(br)^d}\right) u_\mu u_\nu \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu + r^2 \left(\eta_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu\right) \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu . \tag{5.5}$$

Powyższe rozwiązanie może być w prosty sposób uogólnione wykonując lorentzowskie pchnięcie i zastępując wektor $u_\mu = \{-1, 0, 0, 0\}$ dowolnym, stałym czterowektorem spełniającym warunek normalizacji $u_\mu u^\mu = -1$. Wektor u_μ reprezentuje d-wymiarową czteroprędkość na kierunkach x^μ. Dalej łatwo sprawdzić, że (5.5) będzie wciąż spełniało równania (5.2) jeśli zastąpimy w nim metrykę $\eta_{\mu\nu}$ dowolną, ale ustaloną, stałą metryką $h_{\mu\nu}$. W takim wypadku czteroprędkość u_μ będzie znormalizowana w sensie $h_{\mu\nu}$: $h^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = -1$. Uwzględniając powyższe, otrzymujemy następujące rozwiązanie równań (5.2)

$$\mathrm{d}s^2 = 2u_\mu \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}r - r^2 \left(1 - \frac{1}{(br)^d}\right) u_\mu u_\nu \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu + r^2 \left(h_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu\right) \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu . \tag{5.6}$$

Rozwiązanie to zawiera d-parametrową rodzinę statycznych czarnych dziur z planarnym horyzontem zdarzeń. Linie stałej x^μ w (5.6) są liniami wchodzących zerowych geodezyjnych, które dla dużych r rozchodzą się w kierunkach ustalonych przez u^μ. Radialna współrzędna r jest parametrem afinicznym wzdłuż tych linii [44]. Geometria (5.6) może być postrzegana jako zbiór d-wymiarowych hiperpłaszczyzn sparametryzowanych przez r w zakresie od $r = 0$ do $r = \infty$. Górna granica $r = \infty$ odpowiada brzegowej d-wymiarowej czasoprzestrzeni Minkowskiego, podczas gdy dolna $r = 0$ związana jest z osobliwością geometrii w tym punkcie. Ta ostatnia znajduje się pod horyzontem zdarzeń, zlokalizowanym w $r = 1/b$. Jego pozycja pokrywa się z pozycją horyzontu pozornego.

Parametr b we wzorze (5.6), związany jest z temperaturą Hawkinga T horyzontu zdarzeń następującą relacją

$$b = \frac{d}{4\pi T}\,. \tag{5.7}$$

W przeciwieństwie do czarnych dziur w asymptotycznie płaskiej czasoprzestrzeni, metryka (5.6) dopuszcza niewielkie fluktuacje na kierunkach transwersalnych (znacznie mniejsze niż w kierunku radialnym). Skalę tych fluktuacji wyznacza b.

Załóżmy teraz, że b, u^μ i $h_{\mu\nu}$ nie są stałymi parametrami, a funkcjami współrzędnych x^μ. W sytuacji, gdy skala ich zmienności jest mała w porównaniu do skali wyznaczonej przez b, metryka (5.6) jest przybliżonym rozwiązaniem nieliniowych równań Einsteina. Aby rozwiązanie to było ścisłe, należy do niego dodać odpowiednie poprawki zawierające gradienty b, u_μ, $h_{\mu\nu}$. Jak pokazano w [25], postępując w ten sposób możemy znaleźć rząd po rzędzie ścisłe rozwiązanie równań Einsteina dla przypadku wolnozmiennych geometrii. Mając je, jesteśmy w stanie stosując standardowy słownik AdS/CFT otrzymać zachowany tensor energii-pędu [64, 77], wyrażony w terminach b, u_μ i $h_{\mu\nu}$. We wiodącym rzędzie symetria konforemna implikuje, że ogólna postać tensora energii pędu w stanie równowagi ma postać

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + p P^{\mu\nu}, \tag{5.8}$$

gdzie

$$\rho = (d-1)\, p. \tag{5.9}$$

W (5.8) $P^{\mu\nu}$ jest projektorem danym przez (3.6). Z (5.9) widać, że tensor (5.8) spełnia konforemne równanie stanu.

Przejdźmy teraz do konstrukcji wyrazów w wyższych rzędach reprezentujących szukane poprawki do metryki (5.6). Wszystkie one będą konstruowane w rozwinięciu gradientowym z pochodnych na kierunkach x^μ wielkości b, u^μ, $h_{\mu\nu}$ oraz dodatkowych, skalarnych współczynników funkcyjnych zależnych od r i b. Każda taka pochodna traktowana będzie jako mała pierwszego rzędu, przy czym ograniczymy się do drugiego rzędu włącznie. Budując wyrażenia w rozwinięciach gradientowych z pochodnych podstawowych wielkości hydrodynamicznych należy zwrócić uwagę na ich tensorowy charakter – wydzielić można tutaj niezależne, Weyl-niezmiennicze skalary S^i, wektory ${V_\mu}^i$ i tensory ${T_{\mu\nu}}^i$. Wygodnie jest przy tym wybrać bazę, w której zarówno wektory, jak też wszelkie możliwe tensory są ortogonalne do czteroprędkości:

$$u^\mu {V_\mu}^i = 0, \quad u^\mu {T_{\mu\nu}}^i = 0. \tag{5.10}$$

W ogólności, jak zostało to pokazane w [25], należy brać pod uwagę wszystkie możliwe człony dające się skonstruować w ten sposób. Zadanie można jednak uprościć odwołując się do symetrii konforemnej i szukając Weyl-niezmienniczych rozwiązań równań Einsteina. W przypadku metryki brzegowej $h_{\mu\nu}$ i czteroprędkości u_μ implikuje to, że pod wpływem transformacji Weyla transformują się one zgodnie z regułami danymi przez (3.23) i (3.25). Dodatkowo, Weyl-niezmienniczość pełnej metryki g_{AB} implikuje, że r ma wagę $+1$:

$$r \to e^\phi r. \tag{5.11}$$

Ostatni warunek pociąga za sobą fakt, że b ma wagę -1. W ten sposób br jest Weyl-niezmienniczym skalarem.

Poniżej opiszemy szczegółową metodologię poszukiwania metryki dualnej do hydrodynamiki w przypadku braku zachowanych prądów, w ustalonym wymiarze. Przyjmijmy, że będzie to $d = 4$. W dowolnych d-wymiarach metryka ta została znaleziona w [26]. Opisana niżej metoda pozwala na uogólnienie wyniku dla dowolnego d (a tym samym odtworzeniu rezultatu [26]), po rozważeniu kilku przypadków szczególnych.

Weyl-niezmiennicza postać metryki może być przedstawiona jako [26]:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\mathcal{G}_{\mu\nu} - 2u_\mu \mathcal{V}_\nu\right) \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu - 2u_\mu \mathrm{d}x^\mu \left(\mathrm{d}r + r\mathcal{A}_\nu \mathrm{d}x^\nu\right). \tag{5.12}$$

Przyjmiemy tutaj, że człony $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ są transwersalne do czteroprędkości, tzn. $u^\mu \mathcal{G}_{\mu\nu} = 0$. Jak się okazuje, warunek ten całkowicie wyczerpuje swobodę wyboru cechowania. Z drugiej strony zadaje on bardzo wygodne i proste cechowanie, tożsame z zastosowanym w [26] i różne od wybranego w [30, 31]. W szczególności, metrykę (5.6) odtworzymy kładąc

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\mu &= r^2 B u_\mu, \\ \mathcal{G}_{\mu\nu} &= r^2 P_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{5.13}$$

gdzie

$$B = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{b^4 r^4}\right). \tag{5.14}$$

Metryka (5.12) z $\mathcal{V}_\mu$ i $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ danymi przez (5.13) jest dominującym członem zerowego rzędu w rozwinięciu gradientowym. Chcąc znaleźć poprawki do niej w wyższych rzędach, musimy wziąć pod uwagę dodatkowe człony zbudowane z pochodnych b, u_μ i $h_{\mu\nu}$. Pogrupować je można w niezależne, skalary, wektory i tensory. W pierwszym rzędzie jedyną taką strukturą jest symetryczny, bezśladowy tensor $\sigma_{\mu\nu}$, dany przez (3.34). Implikuje to, że do pierwszego rzędu włącznie $\mathcal{V}_\mu$ i $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ będą następującej postaci

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\mu &= r^2 B u_\mu, \\ \mathcal{G}_{\mu\nu} &= r^2 P_{\mu\nu} + 2br^2 F \sigma_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{5.15}$$

gdzie F jest funkcją Weyl niezmienniczego argumentu br (dla wygody, w większości przypadków będziemy opuszczać ten argument). Postać funkcji F można ustalić rozwiązując równania Einsteina do pierwszego rzędu włącznie (5.2). W celu znalezienia rozwiązań wygodnie jest wybrać ustalony punkt, np. $x = 0$ a następnie rozwinąć b, u_μ, $h_{\mu\nu}$ wokół tego punktu w szereg Taylora. Korzystamy przy tym z faktu, że pochodne w rozwinięciach gradientowych traktowane są jako małe pierwszego rzędu. Dla $b(x)$ i $u_\mu(x)$ dostajemy

$$\begin{aligned} u^\mu(x) &= u^\mu(0) + \epsilon\, x^\alpha \partial_\alpha u^\mu(0) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ b(x) &= b(0) + \epsilon x^\alpha \partial_\alpha b(0) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Wygodnie jest przy tym przyjąć czteroprędkość w zerowym rzędzie $u^\mu(0) = (1,0,0,0)$. Dla uproszczenia będziemy również pisać skrótowo $b(0) = b$. Czterowymiarowa metryka brzegowa $h_{\mu\nu}(x)$ jest również rozwijana wokół $x = 0$. Rozwijając ją zakładamy, że w zerowym rzędzie $h_{\mu\nu}(0) = \eta_{\mu\nu}$. Co więcej, by jeszcze bardziej uprościć obliczenia, przejdziemy do układu współrzędnych, w którym wszystkie pierwsze pochodne $h_{\mu\nu}$ znikają w punkcie $x = 0$

$$h_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{5.17}$$

W ogólności drugie pochodne nie mogą być w ten sposób wyzerowane. Ich obecność wyraża odstępstwo metryki $h_{\mu\nu}$, od metryki płaskiego brzegu $\eta_{\mu\nu}$.

Kluczowym elementem rachunku pozostaje sposób, w jaki możemy zaimplementować rozwinięcia (5.16), (5.17) w metryce g_{AB}, a następnie wyznaczyć warunki gwarantujące spełnienie równań Einsteina (5.2). W tym celu wygodnie jest użyć programu `Mathematica` wraz z pakietem do obliczeń tensorowych opisanym w Dodatku A. Na wstępie wczytujemy podstawowe wielkości, takie jak wymiarowość czasoprzestrzeni, postać metryki $\eta_{\mu\nu}$ oraz rozwinięcia $b(x)$, $h(x)$, $u_\mu(x)$ w szereg Taylora wokół wokół $x = 0$. Przykładowo, dla $b(x)$ do pierwszego rzędu mamy

$$b(x) \to b_0 + \epsilon b_{1\alpha} x^\alpha + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{5.18}$$

Jak poprzednio, ϵ numeruje człony rozwinięcia gradientowego, pozwalając odróżnić wyrazy danego rzędu. W (5.32) b_0 oraz $b_{1\alpha}$ i $b_{2\alpha\beta}$ oznaczają odpowiednio zerowe i pierwsze pochodne $b(x)$ w $x = 0$:

$$b_0 = b(0), \quad b_{1\alpha} = \partial_\alpha b(0). \tag{5.19}$$

Analogicznie, czteroprędkość u_μ przedstawiona być może jako:

$$u_\mu(x) \to u_\mu(0) + \epsilon u_{1\alpha\mu} x^\alpha + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{5.20}$$

przy czym zgodnie z wcześniejszymi założeniami

$$u_\mu(0) = \{-1, 0, 0, 0\}. \tag{5.21}$$

Warunek normalizacji $u^\mu u_\nu = -1$ wygodnie jest od razu uwzględnić w rozwinięciu gradientowym czteroprędkości, znajdując wiąz na współczynniki $u_{1\alpha\mu}$. Ponieważ do pierwszego rzędu $h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, jedynymi członami, jakie wejdą do równań Einsteina, będą wielkości zbudowane z pochodnych b i u_μ. Rozwinięcie gradientowe metryki (5.12) w pierwszym rzędzie znajdujemy wykorzystując pakiet A, ze znalezionych wcześniej elementów składowych rozwinięć gradientowych prostszych wielkości. Wielkości te tworzymy z kolei z b i u_μ (a także $\eta_{\mu\nu}$). Przykładowo, $\sigma_{\mu\nu}$ otrzymujemy w oparciu o rozwinięcia b i u_μ oraz ich pochodne. Mając metrykę, możemy następnie wypisać równania Einsteina.

W równaniach Einsteina wygodnie jest wydzielić równania więzów, które nie prowadzą do jakichkolwiek warunków na współczynniki funkcyjne (w naszym przypadku na F), ale narzucają dodatkowe więzy na współczynniki rozwinięć gradientowych b i u_μ. Równaniami tymi są następujące kombinacje

$$G_\mu{}^r - \frac{1}{2}d(d-1)g_\mu{}^r = 0, \tag{5.22}$$

przy czym w naszym przypadku $d = 4$. Równania (5.22) prowadzą do następujących warunków

$$b_{10} = \frac{1}{3}b_0 \sum_{i=1}^{3} b_{1i}, \quad u_{1i} = b_{1i}. \tag{5.23}$$

W myśl naszych konwencji oznacza to, że

$$\partial_0 b(0) = \frac{1}{3}b(0) \sum_{i=1}^{3} \partial_i u_i(0), \quad \partial_0 u_i(0) = \partial_i b(0). \tag{5.24}$$

Równania więzów mają interpretację równań hydrodynamiki odpowiadających zachowaniu holograficznego tensora energii-pędu (w przypadku (5.24) tensora energii-pędu w zerowym rzędzie). Wrócimy do tego zagadnienia w następnej sekcji, przy okazji grawitacyjnej rekonstrukcji $T^{\mu\nu}$.

Przeanalizujmy teraz rozwiązania równań dynamicznych. W ogólności równaniami tymi będą wszystkie pozostałe składowe równań Einsteina, które nie są tożsame z (5.22). Biorąc pod uwagę (5.24) łatwo sprawdzić, że równania te będą spełnione o ile

$$F''(b_0 r) = \frac{3b_0 r}{1 - b_0^4 r^4} - \frac{(5b_0^4 r^4 - 1)\, F'(b_0 r)}{b_0 r\,(b_0^4 r^4 - 1)}. \tag{5.25}$$

Równanie (5.25) można łatwo odcałkować, dostając

$$F(b_0 r) = \int_{b_0 r}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x^3 - 1}{x(x^4 - 1)}. \tag{5.26}$$

Stałe całkowania zostały ustalone przez dwa warunki: regularność na horyzoncie zdarzeń oraz normalizowalność metryki (nieosobliwość wyrażenia $r^{-2}g_{AB}$ w granicy $r \to \infty$)[1].

Mając rozwiązania w pierwszym rzędzie możemy przejść rzędu drugiego. Na początku zidentyfikujmy niezależne struktury tensorowe, jakie można w tym rzędzie wypisać. Jak pamiętamy, w pierwszym rzędzie jedyną taką strukturą jest symetryczny, bezśladowy tensor $\sigma_{\mu\nu}$. W drugim rzędzie ich liczba znacząco wzrasta. Aby ją ograniczyć, a tym samym uprościć rachunek związany z rozwiązywaniem równań Einsteina, wykorzystać można rozwiązania równań więzów z rzędu pierwszego. W szczególności, łatwo pokazać że (5.24) implikują iż $\mathcal{D}_\mu b$ jest efektywnie drugiego rzędu:

$$\mathcal{D}_\mu b = \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{5.27}$$

Warunek ten znacząco zawęża liczbę niezależnych struktur. Biorąc to pod uwagę, otrzymujemy zestaw następujących wielkości:

- Skalary:

$$\begin{aligned} S_1 &= b^2\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}, \\ S_2 &= b^2\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}, \\ S_3 &= b^2\mathcal{R}, \end{aligned} \tag{5.28}$$

- Wektory:

$$\begin{aligned} V_{1\mu} &= bP_{\mu\nu}D_\rho\sigma^{\nu\rho}, \\ V_{2\mu} &= bP_{\mu\nu}D_\rho\omega^{\nu\rho}, \end{aligned} \tag{5.29}$$

[1]Wynika to z faktu, że metrykę teorii pola na konforemnym brzegu otrzymujemy w granicy $\lim_{r\to\infty} r^{-2}(\mathcal{G}_{AB} - u_{(\mu}\mathcal{V}_{\nu)})$.

- Tensory:

$$\begin{aligned}
T_{1\mu\nu} &= u^\rho D_\rho \sigma_{\mu\nu}, \\
T_{2\mu\nu} &= C_{\mu\alpha\nu\beta} u^\alpha u^\beta, \\
T_{3\mu\nu} &= \omega_\mu{}^\lambda \sigma_{\lambda\nu} + \omega_\nu{}^\lambda \sigma_{\lambda\mu}, \\
T_{4\mu\nu} &= \sigma_\mu{}^\lambda \sigma_{\lambda\nu} - \frac{1}{d-1} P_{\mu\nu} \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu}, \\
T_{5\mu\nu} &= \omega_\mu{}^\lambda \omega_{\lambda\nu} + \frac{1}{d-1} P_{\mu\nu} \omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

W powyższych wzorach $\mathcal{R}$ i $\mathcal{C}_{\mu\nu\alpha\beta}$ dane są przez (3.40) i (3.41). Do drugiego rzędu włącznie, $\mathcal{V}_\mu$ i $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ w (5.12) uogólniamy do następującej postaci

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_\mu &= r^2 B u_\mu + r^2 \sum_{i=1}^{3} K_i S_i u_\mu + r \sum_{i=1}^{2} W_i V_{i\mu}, \\
\mathcal{G}_{\mu\nu} &= r^2 P_{\mu\nu} + 2br^2 F \sigma_{\mu\nu} + r^2 \sum_{i=1}^{3} L_i S_i P_{\mu\nu} + \sum_{i=1}^{5} H_i T_{i\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

W powyższych wzorach wprowadziliśmy dodatkowe, skalarne współczynniki funkcyjne: F, K_i, W_i, L_i oraz H_i. Wszystkie one są funkcjami Weyl-niezmienniczego argumentu br. Dla wygody, podobnie jak w (5.31), w większości przypadków będziemy opuszczać ten argument (wyjątkiem pozostaną sytuacje, w których nie jest to możliwe). Pamiętamy przy tym, że wielkości b, u_μ są funkcjami współrzędnych x^μ, a każda pochodna na kierunkach x^μ traktowana jest jako mała pierwszego rzędu. W (5.31) jest więc jeden człon pierwszego rzędu związany z tensorem $\sigma_{\mu\nu}$ i jedną niewiadomą funkcją F, oraz 13 członów drugiego rzędu, związanych z niewiadomymi współczynnikami funkcyjnymi K_i, W_i, L_i i H_i. Wszystkie one zostaną określone w toku rozwiązywania równań Einsteina.

Procedura rozwiązywania równań Einsteina w drugim rzędzie jest identyczna do zastosowanej w rzędzie pierwszym. Z uwagi jednak na znacząco większy stopień komplikacji, należy tutaj zwrócić uwagę na kilka szczegółów natury technicznej. Weźmy przykładowo pod uwagę rozwinięcie b:

$$b(x) \to b_0 + \epsilon b_{1\alpha} x^\alpha + \frac{1}{2}\epsilon^2 b_{2\alpha\beta} x^\alpha x^\beta. \tag{5.32}$$

Ponieważ pochodne cząstkowe komutują, macierz współczynników $b_{2\alpha\beta}$ musi być symetryczna we wskaźnikach α i β. Narzucenie tego warunku eliminuje na wstępie część z jej niewiadomych składowych. Podobna uwaga dotyczy rozwinięć u_μ i $h_{\mu\nu}$. Dodatkowo, ze względu na fakt, iż metryka $h_{\mu\nu}$ odbiega w drugim rzędzie od metryki przestrzeni Minkowskiego

$$h_{\mu\nu}(x) \to \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^2 h_{2\alpha\beta\mu\nu} x^\alpha x^\beta, \tag{5.33}$$

wiąz $h^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = -1$ prowadzi do nietrywialnych związków pomiędzy współczynnikami w rozwinięciu gradientowym czteroprędkości i metryki $h_{\mu\nu}$, które należy uwzględnić. Eliminuje to pewną część dowolnych współczynników w rozwinięciach gradientowych.

Z metryki $h_{\mu\nu}$ konstruujemy czterowymiarowe tensory krzywiznowe, wchodzące w skład S_3 i $T_{2\mu\nu}$. Wygodnie jest przy tym zacząć od wyznaczenia symboli Christoffela

$$\Gamma^\alpha_{4\mu\nu} \to \frac{1}{2} h^{\alpha\beta}(\partial_\mu h_{\beta\nu} + \partial_\nu h_{\beta\mu} - \partial_\beta h_{\mu\nu}). \tag{5.34}$$

Jak poprzednio, prawą stronę (5.34) znajdujemy korzystając z pakietu opisanego w Dodatku A. Uzyskane w ten sposób rozwinięcie posłuży następnie do konstrukcji kolejnych wielkości, takich jak np. tensor Riemanna. Pozostałe elementy składowe metryki budujemy identycznie jak miało to miejsce w pierwszym rzędzie, znajdując rozwinięcia gradientowe niezależnych skalarów, wektorów i tensorów, a następnie konstruując z nich elementy metryki g_{AB} oraz składowe tensora Einsteina.

Rozwiązywanie równań Einsteina zaczniemy od równań więzów (5.22). Równania te prowadzą do związków pomiędzy składowymi rozwinięć gradientowych b, u_μ i $h_{\mu\nu}$, które schematycznie przedstawić można jako

$$
\begin{aligned}
b_{10} &= B_{1\alpha}(b_{1\alpha}, u_{1\alpha\mu}, u_{2\alpha\beta\mu}, h_{2\alpha\beta\mu\nu}), \\
b_{2\alpha\beta} &= B_{2\alpha\beta}(b_{1\alpha}, u_{1\alpha\mu}, u_{2\alpha\beta\mu}, h_{2\alpha\beta\mu\nu}), \\
u_{2001} &= U_{2001}(u_{1\alpha\mu}, u_{2\alpha\beta\mu}, h_{2\alpha\beta\mu\nu}), \\
u_{2002} &= U_{2002}(u_{1\alpha\mu}, u_{2\alpha\beta\mu}, h_{2\alpha\beta\mu\nu}), \\
u_{2012} &= U_{2012}(u_{1\alpha\mu}, u_{2\alpha\beta\mu}, h_{2\alpha\beta\mu\nu}), \\
u_{2003} &= U_{2003}(u_{1\alpha\mu}, u_{2\alpha\beta\mu}, h_{2\alpha\beta\mu\nu}), \\
u_{2013} &= U_{2013}(u_{1\alpha\mu}, u_{2\alpha\beta\mu}, h_{2\alpha\beta\mu\nu}), \\
u_{2023} &= U_{2023}(u_{1\alpha\mu}, u_{2\alpha\beta\mu}, h_{2\alpha\beta\mu\nu}),
\end{aligned} \tag{5.35}
$$

przy czym $B_{1\alpha}$, $B_{2\alpha\beta}$, U_{2001} oznaczają wielomiany odpowiednich argumentów. Rozwiązania (5.35) mają niekowariantną postać z uwagi na nasze wcześniejsze założenia odnośnie postaci rozwinięć gradientowych, takie jak np. wybór wektora czteroprędkości w zerowym rzędzie. Można jednak pokazać, że równania (5.35) implikują następujące, przydatne tożsamości

$$\mathcal{D}_\mu b = \frac{1}{6} S_1 u_\mu - \frac{1}{2} b V_{1\mu}, \tag{5.36}$$

$$\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu = \mathcal{O}(\epsilon^3). \tag{5.37}$$

Równanie (5.36) można wykorzystać do wyrażenia $\mathcal{D}_\mu b$ w terminach S_1 i $V_{1\mu}$, podczas gdy (5.37) okaże się niezwykle użyteczne przy okazji obliczeń związanych ze znajdywaniem horyzontu pozornego.

Po rozwiązaniu równań więzów, możemy przejść do równań dynamicznych. Zdefiniujmy dla uproszczenia:

$$Ein_{AB} := G_{AB} - \frac{1}{2} d(d-1) g_{AB} = G_{AB} - 6 g_{AB}. \tag{5.38}$$

Przy użyciu (5.38), równania Einsteina zapiszemy jako

$$Ein_{AB} = 0. \tag{5.39}$$

Powyższe równania prowadzą do układu równań różniczkowych na niewiadome współczynniki funkcyjne. Układ ten jednakże mocno się separuje. Wykorzystując to warto podzielić równania na sektory, odpowiednio: skalarny, wektorowy i tensorowy. Równania z danego sektora prowadzą do związków różniczkowych na odpowiednie skalarne, wektorowe i tensorowe współczynniki funkcyjne. Oczywiście w toku dalszej analizy bierzemy pod uwagę warunki wynikające z równań więzów (5.35).

W praktyce, w celu znalezienia szukanych równań różniczkowych, wygodnie skupić uwagę na pojedyńczym elemencie rozwinięcia gradientowego metryki czy czteroprędkości, takim jak np. U_{2013}. Element ten mnożony jest przez wyrażenie zbudowane z pochodnych współczynników funkcyjnych. Ponieważ równania więzów zostały już rozwiązane, skorzystać można z faktu, iż nie spodziewamy się już żadnych dodatkowych więzów na elementy rozwinięć gradientowych. Oznacza to, że jedynym sposobem na spełnienie danej składowej równania Einsteina, jest przyrównanie do zera czynnika z pochodnymi szukanych funkcji przy każdym elemencie rozwinięcia gradientowego. Prowadzi to do niezwykle szybkiej metody odczytania równań różniczkowych na poszukiwane funkcje, w której ograniczamy się jedynie do wybranych wyrazów długich rozwinięć gradientowych. Rzecz jasna na zakończenie pozostaje jedynie sprawdzić, że znalezione równania istotnie spełniają pełne rozwinięcia równań Einsteina.

Poszukiwanie współczynników funkcyjnych wygodnie jest zacząć od sektora funkcji skalarnych. W sektorze tym szukanymi funkcjami są K_1, K_2, K_3, L_1, L_2, L_3. Równania różniczkowe na te funkcje dostajemy z analizy następujących równań

$$Ein_{00} = 0, \quad Ein_{0r} = 0, \quad Ein_{rr} = 0. \tag{5.40}$$

Dokładniej, równania różniczkowe na funkcje L_i otrzymać można z analizy równań $Ein_{rr} = 0$, natomiast na funkcje K_i z $Ein_{00} = 0$. Samo $Ein_{0r} = 0$ nie wnosi już jakichkolwiek warunków.

Równania na funkcje skalarne można przedstawić w następującej postaci

$$\begin{aligned}
{L_1}'' &= -\frac{4\left(3x^4+1\right)FF'}{3x\left(x^4-1\right)} + \frac{2\left(F'\right)^2}{3} - \frac{4Fx}{x^4-1} - \frac{2{L_1}'}{x}, \\
{L_2}'' &= \frac{2}{3x^4} - \frac{2{L_2}'}{x}, \\
{L_3}'' &= -\frac{2{L_3}'}{x}, \\
(x^4 K_1)' &= \frac{2F\left(x^3-1\right)\left(3x^4-1\right)}{3\left(x-x^5\right)} - \frac{1}{2}\left(3x^4-1\right){L_1}' - \frac{2x^2+x+1}{6x(x+1)\left(x^2+1\right)}, \\
(x^4 K_2)' &= -\frac{1}{2}\left(3x^4-1\right){L_2}' - \frac{1}{6x^3}, \\
(x^4 K_3)' &= \frac{x}{6} - \frac{1}{2}\left(3x^4-1\right){L_3}',
\end{aligned} \tag{5.41}$$

gdzie dla wygody zdefiniowaiśmy

$$x := b_0 r, \tag{5.42}$$

natomiast prim $'$ oznacza pochodną po x.

Rozwiązaniami równań (5.41) są:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{2}{3}F^2 - \frac{2}{3}\int_{br}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\int_x^{\infty}\mathrm{d}y\, y^2 F'^2, \\
L_2 &= \frac{1}{3b^2r^2}, \\
L_3 &= 0, \\
K_1 &= -\frac{1}{2b^2r^2} + \frac{1}{b^4r^4}\int_{br}^{\infty}\mathrm{d}x\Big(-x + \frac{1+x+2x^2}{6x(1+x)(1+x^2)} + \\
&- \frac{1-3x^4}{3x^2}\int_x^{\infty}\mathrm{d}y\, y^2(F')^2\Big), \\
K_2 &= \frac{1}{b^2r^2} + \frac{1}{4b^6r^6}, \\
K_3 &= \frac{1}{12b^2r^2}.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

W powyższych wzorach opuściliśmy indeks „0” w b_0, bowiem w członach drugiego rzędu istotny jest jedynie zerowy rząd rozwinięcia gradientowego odpowiednich funkcji. Podobna uwaga dotyczy również pierwszego rzędu – (5.26) należy przepisać jako

$$F(br) = \int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x^3 - 1}{x(x^4 - 1)}. \tag{5.44}$$

Od tego momentu x odnosić się będzie do br, natomiast prim oznaczać różniczkowanie po br.

Większość stałych całkowania w (5.43) została wyznaczona w oparciu o dwa warunki: nieosobliwość na horyzoncie oraz normalizowalność metryki w granicy dużych r. Warunki te jednak nie ustalają ich wszystkich, toteż ogólne rozwiązanie równań sektora skalarnego jest ogólniejsze od (5.43) i zawiera pewne dodatkowe współczynniki, związane z nieustalonymi stałymi całkowania. W (5.43) wybrano je jednak w taki sposób, by zagwarantować spełnienie warunków Landaua (3.15) dla wyliczonego później, holograficznego tensora energii-pędu. Wrócimy do tego przy okazji rekonstrukcji $T^{\mu\nu}$. Sektor funkcji wektorowych tworzą

$$Ein_{1r} = 0, \quad Ein_{2r} = 0, \quad Ein_{3r} = 0. \tag{5.45}$$

Prowadzą one do następujących równań

$$\begin{aligned} (x^{-1}W_1)'' &= -\frac{2F'}{x^2} - \frac{5(x^{-1}W_1)'}{x}, \\ (x^{-1}W_2)'' &= \frac{2}{x^4} - \frac{5(x^{-1}W_2)'}{x}. \end{aligned} \tag{5.46}$$

Całkując powyższe znajdujemy

$$\begin{aligned} W_1 &= -br \int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \Big(\frac{(x-1)(x+2)}{x^2(x+1)\,(1+x^2)} - \frac{4}{x^5} \int_{x}^{\infty} \mathrm{d}y \frac{y^2(2+y)}{(1+y^2)^3} \Big) - \frac{3}{4b^3r^3}, \\ W_2 &= -\frac{1}{2br}. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Podobnie jak miało to miejsce w sektorze funkcji skalarnych, rozwiązania (5.47) zawierają w ogólności dodatkowe stałe całkowania, które nie mogą być określone przez warunki regularności i normalizowalności. Sektor równań tensorowych zadany jest przez

$$Ein_{12} = 0, \quad Ein_{13} = 0, \quad Ein_{23} = 0, \tag{5.48}$$

$$Ein_{11} = 0, \quad Ein_{22} = 0, \quad Ein_{33} = 0. \tag{5.49}$$

Z (5.48) dostajemy następujące równania różniczkowe na $H_1 - H_5$:

$$\begin{aligned}
\left(x^{-2}H_1\right)'' &= -\frac{4x^2F'}{x^4-1} - \frac{6Fx}{x^4-1} + \frac{\left(1-5x^4\right)\left(x^{-2}H_1\right)'}{\left(x^4-1\right)x} + \frac{2}{x^4-1}, \\
\left(x^{-2}H_2\right)'' &= \frac{\left(1-5x^4\right)\left(x^{-2}H_2\right)'}{x\left(x^4-1\right)} + \frac{4}{x^4-1}, \\
\left(x^{-2}H_3\right)'' &= -\frac{4x^2F'}{x^4-1} - \frac{6Fx}{x^4-1} + \frac{\left(1-5x^4\right)\left(x^{-2}H_3\right)'}{\left(x^4-1\right)x} - \frac{2}{x^4-1}, \\
\left(x^{-2}H_4\right)'' &= 4\left(F'\right)^2 - \frac{12Fx}{x^4-1} + \frac{\left(1-5x^4\right)\left(x^{-2}H_4\right)'}{x\left(x^4-1\right)} + \frac{4}{x^4-1}, \\
\left(x^{-2}H_5\right)'' &= \frac{\left(1-5x^4\right)\left(x^{-2}H_5\right)'}{x\left(x^4-1\right)} + \frac{4\left(x^4+1\right)}{x^4\left(x^4-1\right)}.
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Po ich odcałkowaniu mamy

$$\begin{aligned}
H_1 &= -(br)^2 \int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{1}{x(1+x^2)} \left(1 + \frac{1}{1-x^2} \int_1^x \mathrm{d}y \left(6y^2F + 4y^3F'\right)\right), \\
H_2 &= -2(br)^2 \int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{1}{x(1+x^2)}, \\
H_3 &= (br)^2 \int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{1}{x(1+x^2)} \left(1 - \frac{1}{1-x^2} \int_1^x \mathrm{d}y \left(6y^2F + 4y^3F'\right)\right), \\
H_4 &= 2(br)^2F^2 - 2(br)^2 \int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{1}{x(1+x^2)}, \\
H_5 &= -1.
\end{aligned}$$

5.1.1 Tensor energii pędu

Przywołując dyskusję (2.2), holograficzny słownik wynikający z korespondencji AdS/CFT daje unikalny sposób na obliczenie wielkości fizycznych związanych z teorią na brzegu. Stosując powyższe metody dla naszej metryki, dostajemy

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi G_N} \lim_{r\to\infty} r^2 \left(K_{\mu\nu} - KH_{\mu\nu} + 3H_{\mu\nu} - E^H_{\mu\nu}\right). \tag{5.51}$$

Aby wyznaczyć $T^{\mu\nu}$, należy wyliczyć asymptotyki funkcji (5.43), (5.47), (5.51) oraz wyznaczyć krzywizny zewnętrzne. Jak poprzednio, rozważymy tutaj przypadek $d = 4$.

Zachowanie asymptotyczne większości funkcji znajdziemy rozwijając odpowiednie wyrażenia podcałkowe w szeregi potęgowe w granicy $r \to \infty$. Jednakże dla H_1 i H_3 metoda ta nie może być bezpośrednio zastosowana z uwagi na logarytmiczne rozbieganie się asymptotyk funkcji podcałkowych. W tym przypadku należy najpierw wykonać całkowanie przez części z użyciem własności funkcji F (przekształcając odpowiednio wyrażenie podcałkowe). Ostatecznie dostajemy

$$F \to \frac{1}{br} - \frac{1}{4b^4r^4} + \frac{1}{5b^5r^5} + \mathcal{O}(r^{-8}), \tag{5.52}$$

$$\begin{aligned}
L_1 &\to \frac{1}{3b^2r^2} - \frac{4}{15b^5r^5} + \frac{2}{9b^6r^6} + \mathcal{O}(r^{-8}),\\
L_2 &\to \frac{1}{3b^2r^2},\\
L_3 &\to 0,\\
K_1 &\to -\frac{1}{2b^2r^2} - \frac{1}{6b^5r^5} - \frac{1}{20b^6r^6} + \mathcal{O}(r^{-8})\\
K_2 &\to \frac{1}{b^2r^2} + \frac{1}{4b^6r^6},\\
K_3 &\to \frac{1}{12b^2r^2},
\end{aligned} \tag{5.53}$$

$$\begin{aligned}
W_1 &\to -\frac{1}{2br} - \frac{2}{5b^4r^4} + \frac{1}{6b^5r^5} + \mathcal{O}(r^{-6}),\\
W_2 &\to -\frac{1}{2br}
\end{aligned} \tag{5.54}$$

$$\begin{aligned}
H_1 &\to -\frac{1}{4(br)^2}\int_1^\infty \mathrm{d}x\frac{1}{x(x+1)}+\mathcal{O}(r^{-4}),\\
H_2 &\to -1+\frac{1}{2(br)^2}+\mathcal{O}(r^{-4}),\\
H_3 &\to 1-\frac{1}{4(br)^2}\int_1^\infty \mathrm{d}x\frac{1}{x(x+1)}+\mathcal{O}(r^{-4}),\\
H_4 &\to 1+\frac{1}{2(br)^2}+\mathcal{O}(r^{-4}),\\
H_5 &\to -1+\mathcal{O}(r^{-4}).
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Do obliczenia krzywizn zewnętrznych potrzebne nam są pieciowymiarowe symbole Christoffela Γ^A_{BC}: $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$, $\Gamma^\rho_{\mu r}$, Γ^ρ_{rr}, $\Gamma^r_{\mu\nu}$, $\Gamma^r_{\mu r}$, Γ^r_{rr}. Jak poprzednio, wyliczając je wykorzystamy pakiet A, co pozwoli znaleźć zarówno ich algebraiczną postać, jak też i rozwinięcia gradientowe wokół ustalonego punktu. Postepując w ten sposób można pokazać, że $\Gamma^r_{\mu\nu}$ i $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ dają się przedstawić w terminach $\Gamma^\rho_{4\mu\nu}$ (a także pochodnych pozostałych wielkości hydrodynamicznych: u_μ, b), natomiast Γ^ρ_{rr} i Γ^r_{rr} są równe zeru. Algebraiczna postać pozostałych symboli Christoffela jest już dużo bardziej skomplikowana.

Niech następnie $H_{\mu\nu}$ oznacza metrykę indukowaną na hiperpowierzchni $r = const$. W naszym przypadku

$$H_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}. \tag{5.56}$$

Jednostkowy wektor normalny do tej hiperpowierzchni wynosi

$$n_A = (g^{rr})^{-1/2}\partial r. \tag{5.57}$$

Wykorzystując (5.57), dostajemy krzywiznę zewnętrzną postaci

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{g^{rr}}}\Gamma^r_{\mu\nu}. \tag{5.58}$$

Mając (5.58) możemy znaleźć skalar krzywizny zewnętrznej K, $H_{\mu\nu}$ oraz brzegowy tensor Einsteina $E^H_{\mu\nu}$. Wszystkie one wstawiamy następnie do wyrażenia na holograficzny tensor energii-pędu (5.51). Granicę $r \to \infty$ obliczymy biorąc pod uwagę znalezione wcześniej zachowania asymptotyczne (5.53), (5.54), (5.55). Ostatecznie, sumując wszystkie wyrazy, otrzymujemy następującą postać tensora energii-pędu

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{1}{16\pi G_5}\Big(b^{-4}(P_{\mu\nu}+3u_\mu u_\nu)-2b^{-3}\sigma_{\mu\nu}+ \\ &+ 2(1+c)b^{-2}T_{1\mu\nu}+2b^{-2}T_{2\mu\nu}+2cb^{-2}T_{3\mu\nu}+2cb^{-2}T_{4\mu\nu}\Big), \end{aligned} \tag{5.59}$$

gdzie

$$c=-\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}=-\frac{\ln 2}{2}. \tag{5.60}$$

W poprzedniej sekcji nadmieniliśmy, że ogólna postać metryki zawiera dodatkowe stałe całkowania, które nie mogą być ustalone w oparciu o warunki regularności na horyzoncie i normalizowalności, przy czym całkując równania sektorów skalarnego i wektorowego, przyjęliśmy pewne określone ich wartości. W ogólności można pokazać, że każdy inny wybór prowadziłby do pojawienia się członów podłużnych w drugim rzędzie w tensorze energii-pędu, co jest niezgodne z warunkami Landaua (3.15). Warunki te eliminują zatem wszelką pozostałą dowolność z metryki.

Postać (5.59) prowadzi do równania stanu postaci $\rho=3p$, przy czym

$$p=\frac{1}{16\pi G_5 b^4}, \tag{5.61}$$

czyli dokładnie tak, jak tego oczekiwaliśmy dla teorii konforemnej.

Zaprezentowany tutaj rachunek: począwszy od rozwiązywania równań Einsteina do wyliczania $T^{\mu\nu}$, można powtórzyć dla innych wymiarowości, odtwarzając ostatecznie rezultaty z [26][2].

Na zakończenie warto jednak wrócić do równań więzów. Równania te odpowiadają równaniom wynikającym z zachowania tensora energii-pędu: $\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0$. W istocie, biorąc pod uwagę postać (5.59), wziętą do pierwszego rzędu włącznie[3]

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{16\pi G_5}\Big(b^{-4}(P_{\mu\nu}+3u_\mu u_\nu)-2b^{-3}\sigma_{\mu\nu}\Big) \tag{5.62}$$

[2] Ogólne wyrażenie na metrykę w [26] jest bardziej kompaktowe od naszego, ze względu na mniejszą liczbę współczynników funkcyjnych i uwzględnienie od początku dowolnych wymiarów d. Wyrażenie to może być jednak odczytane z naszych rozwiązań, poprzez analizę wyników dla kilku rożnych wymiarowości d.

[3] Części drugiego rzędu w tensorze energii-pędu prowadzą do wyrażeń trzeciego rzędu w równaniu $\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0$.

i wstawiając ją do relatywistycznego równania Naviera-Stokesa $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ można pokazać, że wygenerujemy w ten sposób równania tożsame z równaniami więzów (5.22). Z (5.62) wynika, że współczynnik lepkości $\eta = 1/(16\pi G_5 b^3)$. Wykorzystując fakt że termodynamiczna gęstość entropii wynosi $s = 1/(4G_5 b^3)$ [26], odczytujemy

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi}. \tag{5.63}$$

5.2 Struktura przyczynowa geometrii

W niniejszym podrozdziale wyznaczymy położenie horyzontów: zdarzeń i pozornego. Bardzo ważną rzeczą jest sprawdzenie, że istotnie osobliwość metryki w $r = 0$ znajduje się wewnątrz horyzontu oraz że oba horyzonty pokrywają się we wiodącym rzędzie. Dla zachowania ogólności, w toku dalszych obliczeń przyjmiemy postać metryki daną przez [26], słuszną dla dowolnych wymiarów d:

$$\mathrm{d}s^2 = -2u_\mu \mathrm{d}x^\mu(\mathrm{d}r + \mathcal{V}_\alpha \mathrm{d}x^\alpha) + \mathcal{G}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu, \tag{5.64}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_\mu &= r^2\mathcal{B}u_\mu + rA_\mu \\
&+ \frac{1}{d-2}(-b^{-1}(V_{2\mu} + V_{1\mu}) + b^{-2}u_\mu(S_2 - S_1 + \frac{1}{2(d-1)}S_3)) - \frac{2r}{(br)^{d-1}}LV_{1\mu} + \\
&+ u_\mu(\frac{1}{4}b^{-d-2}r^{-d}S_2 + \frac{1}{2(d-1)}\frac{r^2}{(br)^d}K_2S_1) \\
\mathcal{G}_{\mu\nu} &= r^2P_{\mu\nu} + 2br^2F\sigma_{\mu\nu} + \\
&- (T_{5\mu\nu} - \frac{1}{d-1}P_{\mu\nu}b^{-2}S_2) + 2b^2r^2F^2(T_{4\mu\nu} + \frac{1}{d-1}P_{\mu\nu}b^{-2}S_1) - \frac{2r^2}{d-1}K_1S_1P_{\mu\nu} + \\
&- 2b^2r^2H_1(T_{1\mu\nu} + T_{4\mu\nu} + T_{2\mu\nu}) + 2b^2r^2H_2(T_{1\mu\nu} + T_{3\mu\nu})
\end{aligned} \tag{5.65}$$

oraz

$$\mathcal{B} = -\frac{1}{2(br)^d}(1 - (br)^d). \tag{5.66}$$

5.2.1 Horyzont zdarzeń

Zastosujmy teraz metodę opisaną w (4.2) dla metryki danej przez (5.64),(5.65),(5.66). W ogólności horyzont zdarzeń zadany jest równaniem hiperpowierzchni $S(r,x) = const.$ W sytuacji, gdy interesuje nas pozycja horyzontu kowariantnego, funkcja ta musi być Weyl-niezmiennicza i wyraża się w terminach rozwinięć gradientowych niezależnych skalarów, jakie mamy do dyspozycji w danym rzędzie. Ponieważ w zerowym rzędzie horyzont zdarzeń jest zlokalizowany w $r = 1/b$, mamy:

$$S(r, x) = b(x)r - g(x), \tag{5.67}$$

gdzie $g(x)$ jest Weyl-niezmienniczą funkcją, której kolejne wyrazy rozwinęcia gradientowego oznaczono jako $g_0(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$,...

$$g(x) = g_0(x) + g_1(x) + g_2(x) \ + \dots \tag{5.68}$$

Każde g_k w powyższym rozwinięciu jest liniową kombinacją Weyl-niezmienniczych skalarów k-tego rzędu rozwinięcia gradientowego. W zerowym rzędzie, w (5.68) $g_0(x)$ jest równe zeru, bowiem nie ma Weyl-niezmienniczych skalarów w tym rzędzie. Z tego samego powodu $g_1(x) = 0$ (brak skalarów w pierwszym rzędzie). W drugim rzędzie mamy natomiast trzy skalary S_1, S_2 i S_3 (5.28), w związku z czym

$$g(x) = \sum_{k=1}^{3} h_k^{(EH)} S_k. \tag{5.69}$$

Współczynniki h_k będą określone w toku dalszych obliczeń. W ich terminach, horyzont zdarzeń przybiera postać

$$r_{EH} = \frac{1}{b}\left(1 + \sum_{k=1}^{3} h_k^{(EH)} S_k\right) . \tag{5.70}$$

Do drugiego rzędu, wektor normalny m dany przez (4.7) wynosi

$$m = r\ db + b\ dr\,. \tag{5.71}$$

Wektor ten wygodnie jest wyrazić w terminach Weyl-kowariantnych pochodnych:

$$m = r\left(\mathcal{D}_\mu b + b\mathcal{A}_\mu\right) dx^\mu + b\ dr\,. \tag{5.72}$$

Wykorzystując otrzymany wcześniej związek (5.36), przepisujemy ostatni wzór jako

$$\begin{aligned} m^\mu &= bu^\mu + b^2\left(V_1{}^\mu(-\frac{2}{d}\frac{1}{br} + \frac{1}{(d-2)}\frac{1}{(br)^2} + \frac{2}{(br)^d}L) + V_2{}^\mu\frac{1}{(d-2)}\frac{1}{(br)^2}\right), \qquad (5.73)\\ m^r &= 2\mathcal{B}r^2b - A_\mu bru^\mu + \\ &+ \frac{1}{b}\Big((\frac{2}{(d-2)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(br)^d})S_2 + (-\frac{2}{d(d-1)}br - \frac{2}{d-2} + \frac{1}{(d-1)}\frac{1}{(br)^{d-2}}K_2)S_1 + \\ &+ \frac{1}{(d-2)}\frac{1}{(d-1)}S_3\Big). \qquad (5.74)\end{aligned}$$

Położenie horyzontu zdarzeń znajdziemy z warunku (4.8). Ograniczając się do zerowego rzędu łatwo pokazać, że m^2 zeruje się dokładnie dla $r = 1/b$. Wstawiając do równania (4.8) m dane przez (5.73) oraz r dane przez prawą stronę (5.70) i rozwijając wszystko do drugiego rzędu włącznie, otrzymujemy

$$\begin{aligned} h_1^{(EH)} &= \frac{2(d^2+d-4)}{d^2(d-1)(d-2)} - \frac{1}{d(d-1)}K_2(1),\\ h_2^{(EH)} &= -\frac{d+2}{2d(d-2)},\\ h_3^{(EH)} &= -\frac{1}{d(d-1)(d-2)}. \qquad (5.75)\end{aligned}$$

W ten sposób pozycja horyzontu zdarzeń do drugiego rzędu włącznie została wyznaczona i pokrywa się ona z wynikiem zaprezentowanym w [26].

5.2.2 Horyzont pozorny

Pozycja horyzontu pozornego zadana jest równaniem hiperpowierzchni $S(r,x) = const$, gdzie $S(r,x)$ jest Weyl-niezmienniczą funkcją skalarną. W rozwinięciu gradientowym przedstawić ją można jako sumę uwzględniającą wszystkie dostępne, Weyl-niezmiennicze skalary

$$r_{AH} = \frac{1}{b}\left(1 + \sum_{i=1}^{3} h_i^{(AH)} S_i\right), \qquad (5.76)$$

gdzie $h_i^{(AH)}$ są dodatkowymi współczynnikami. Zgodnie z (4.3), w celu ich ustalenia musimy znaleźć wektor v, styczny do Δ. Wektor ten jest równocześnie normalny do m i spełnia warunek Frobeniusa (4.9). By uwzględnić ten warunek, wygodnie jest wybrać specjalny układ współrzędnych. Oznaczmy współrzędne horyzontu jako y^μ. Wówczas rozpatrując warunek $S(r(y), x(y)) \equiv const$, można znaleźć cechowanie $y = x$, w którym wektor v przyjmuje postać

$$v = v^\beta \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\beta} - \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial x^\beta} \right) \frac{\partial}{\partial r} \right\} . \tag{5.77}$$

Wymóg Weyl-niezmienniczości pociąga za sobą (do drugiego rzędu włącznie) żądanie, by „brzegowe" składowe v^μ były postaci

$$v^\mu = b \left(u^\mu + b \sum_{k=1}^{2} c_k V_k^\mu + u^\mu \sum_{k=1}^{3} e_k S_k \right) , \tag{5.78}$$

gdzie c_k oraz e_k są stałymi. Wykorzystując (5.77) można pokazać, że r-owa składowa v jest postaci

$$v^r = -brA_\mu u^\mu - ru^\mu \mathcal{D}_\mu b \, . \tag{5.79}$$

Normalizacja (4.10) implikuje, że współczynniki podłużne w (5.78) znikają: $e_k = 0$ dla $k = 0, \ldots, 3$.

Pozostałe współczynniki w v nie są już dowolne. Aby zagwarantować, że wektor v zadaje foliację, należy narzucić wspomniany już warunek Frobeniusa (4.9). Prowadzi on do dwóch typów równań:

$$v_{[\mu} \partial_\nu v_{\rho]} = 0 \tag{5.80}$$

$$v_{[r} \partial_\nu v_{\rho]} = d \left(c_1 + \frac{1}{d} - \frac{1}{d-2} \right) V_{1[\nu} u_{\mu]} + d \left(c_2 - \frac{1}{d-2} \right) V_{2[\nu} u_{\mu]} \tag{5.81}$$

Znikanie $v_{[\mu} \partial_\nu v_{\rho]}$ jest automatyczne, podczas gdy warunek (5.81) przy wykorzystaniu (5.37) daje

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{2}{d(d-2)} \\ c_2 &= \frac{1}{d-2} \, . \end{aligned} \tag{5.82}$$

Ostatecznie wektor v okazał się więc jednoznacznie określony. Jego składowa transwersalna wynosi

$$v^\mu = bu^\mu + \frac{1}{d-2} b^2 \left(\frac{2}{d} \, V_1^\mu + V_2^\mu \right) . \tag{5.83}$$

Ponieważ warunek Frobeniusa został nałożony na pełną czasoprzestrzeń (a nie tylko na horyzont), wektor v zadaje foliację pełnej czasoprzestrzeni, przynajmniej w pobliżu horyzontu.

Rzeczą interesującą jest fakt, że uzyskaliśmy ścisły rezultat bez jakichkolwiek dowolności. Wydaje się prawdopodobne, że ostatnie pozostaje słuszne również w wyższych rzędach rozwinięcia gradientowego. By to pokazać zauważmy, że w danym rzędzie k, v jest kompletnie określone w terminach składowych v^μ, a składowa v^r nie zależy od wkładu k-tego rzędu do v^μ.

Przez analogię do drugiego rzędu, v^μ w rzędzie k-tym będzie liniową kombinacją wszystkich możliwych poprzecznych i podłużnych wektorów. Dalej, hiperpowierzchnia Δ jest określona poprzez $S(r,x)$ (zob. (5.67)) i w k-tym rzędzie zawiera wszystkie możliwe skalary k-tego rzędu. Wektor m normalny do Δ jest zdefiniowany jako $m = dS$, zatem konstrukcja nie zawiera jakichkolwiek innych, wymaganych określeniu współczynników. Rozważmy teraz warunek normalizacji (4.10) i rozwińmy wkład v^2

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} v^\mu v^\nu - 2u_\mu \mathcal{V}_\nu v^\mu v^\nu - 2u_\mu v^\mu v^r + m^2 = 0. \tag{5.84}$$

W celu wyznaczenia wkładu k-tego rzędu do (5.84) od v^μ, wystarczającym jest wziąć metrykę w zerowym rzędzie. Zauważmy jednak, że skoro we wiodącym rzędzie v^μ jest proporcjonalna do u^μ, a $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ jest poprzeczne, człon pierwszego rzędu po lewej stronie (5.84) znika dla wszystkich r. Ponieważ w v^r nie mamy poprawek od k-tego rzędu v^μ, jedyny człon który od tego zależy to $u_\mu \mathcal{V}_\nu v^\mu v^\nu$. Skoro jednak $\mathcal{V}_\mu$ jest również proporcjonalne do u_μ, we wiodącym rzędzie, cała lewa strona (5.84) w k-tym rzędzie, zależy wyłącznie od podłużnych wkladów do v^μ w tym rzędzie. Formuła (5.84) ustala je więc całkowicie, nie narzucając dodatkowych więzów na wkłady poprzeczne. To co zostaje w k-tym rzędzie, to wkłady skalarne do $S(r,x)$ oraz transwersalne elementy v^μ. Ale w zadanym rzędzie, poprzeczne i podłużne wkłady są niezależne, zatem skalarny warunek $\theta_l = 0$ w rzędzie k ustala wszystkie wkłady do $S(r,x)$. Pozostałe, poprzeczne wkłady do v^μ, wymagane przez foliację Δ określane są natomiast przez warunek Frobeniusa (4.9), dokładnie tak, jak miało to miejsce w drugim rzędzie.

Sprawdzenie, że wybierając odpowiednio wkłady poprzeczne w wektorze v w k-tym rzędzie jesteśmy w stanie spełnić warunek Frobeniusa jest zadaniem trudnym technicznie.

Argumentem, że tak powinno być jest fakt, iż warunek ten musi być spełniony przez v^μ na horyzoncie zdarzeń w dowolnym rzędzie oraz że v^μ jest określone przez m^μ.

Przywołując jawną postać metryki (5.64), (5.65) oraz (4.11), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\ell^\mu &= bu^\mu + \\
&+ \frac{1}{2}b^2\left(V_2{}^\mu\Big(\frac{1}{(d-2)}\frac{1}{(br)^2}+c_2\Big)+V_1{}^\mu\Big(-2\frac{1}{d}\frac{1}{rb}+\frac{1}{(d-2)}\frac{1}{(rb)^2}+2L\frac{1}{(rb)^d}+c_1\Big)\right) \\
\ell^r &= -A_\mu bru^\mu+\mathcal{B}r^2b+ \\
&+ b^{-1}\left(S_2\Big(\frac{1}{d-2}+\frac{1}{4}\frac{1}{(br)^d}\Big)+S_1\Big(-\frac{1}{d-2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(d-1)}\frac{1}{(br)^{d-2}}K_2\Big)+\frac{1}{2(d-2)}\frac{1}{(d-1)}S_3\right)
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
n^\mu &= \frac{1}{2\mathcal{B}r^2}\left(V_1^\mu\Big(\frac{2}{d}\frac{1}{rb}-\frac{1}{(d-2)}\frac{1}{(rb)^2}-2\frac{1}{(rb)^d}L+c_1\Big)+V_2{}^\mu\Big(-\frac{1}{(d-2)}\frac{1}{(rb)^2}+c_2\Big)\right) \\
n^r &= -\frac{1}{b}\,.
\end{aligned} \tag{5.85}$$

Wykorzystując (4.3), do drugiego rzędu włącznie dostajemy następujące ekspansje

$$\begin{aligned}
\theta_{(\ell)} &= (d-1)\left(\mathcal{B}br+\frac{1}{br}\left(S_1\Big(-\frac{1}{(d-2)}+\frac{1}{2(d-1)}\frac{1}{(br)^{d-2}}K_2-\frac{1}{d-1}\mathcal{B}b^3r^3K_1'\Big)+\right.\right. \\
&+ \left.\left. S_2\Big(-\frac{1}{d-1}\mathcal{B}+\frac{1}{(d-2)}+\frac{1}{4}\frac{1}{(br)^d}\Big)+\frac{1}{2}\frac{1}{(d-1)(d-2)}S_3\right)\right)
\end{aligned} \tag{5.86}$$

$$\theta_{(n)} = -\frac{d-1}{br}+\frac{1}{br}\left(\frac{1}{(br)^2}S_2+brK_1'S_1\right). \tag{5.87}$$

Zgodnie z wcześniej przyjętą konwencją, prim oznacza pochodną po br. Zauważmy, że ostatnie rezultaty są Weyl-niezmiennicze. W szczególności, nie ma tutaj członów w pierwszym rzędzie, co jest wymogiem Weyl niezmienniczości. Wykorzystując (5.86), możemy z łatwością wyznaczyć położenie horyzontu pozornego – zgodnie z (4.13), rozpatrujemy w tym celu warunek $\theta_{(\ell)}(r_{AH})=0$. W ten sposób otrzymujemy horyzont postaci (5.76), ze współczynnikami

$$\begin{aligned}
h_1^{(AH)} &= \frac{2}{(d-2)d}-\frac{1}{d(d-1)}K_2(1), \\
h_2^{(AH)} &= -\frac{d+2}{2d(d-2)}, \\
h_3^{(AH)} &= -\frac{1}{d(d-1)(d-2)}\,.
\end{aligned} \tag{5.88}$$

Porównując ostatni wynik z horyzontem zdarzeń (5.75) stwierdzamy, że jedyna różnica między nimi występuje w członie z h_1. Wyrażenie

$$r_{EH} - r_{AH} = \frac{4S_1}{bd^2(d-1)} \geq 0 \tag{5.89}$$

pokazuje, że horyzont pozorny jest umiejscowiony wewnątrz, bądź pokrywa się z horyzontem zdarzeń w tym sensie, że wbiegająca radialna geodezyjna w pierwszej kolejności przecina horyzont pozorny, a następnie horyzont zdarzeń (pamiętamy, że r jest parametrem afinicznym na geodezyjnej)[4]. Można również pokazać, że horyzont pozorny jest przestrzenny bądź zerowy

$$C(r_{AH}) = \frac{2S_1}{d(d-1)} \geq 0\,, \tag{5.90}$$

czyli dokładnie tak, jak tego oczekujemy.

[4]Wynika to z faktu, że S_1 jest nieujemne. W istocie, w układzie współporuszającym się z elementem płynu jedynymi nieznikającymi składowymi $\sigma_{\mu\nu}$ są σ_{ij}. Dalej, $S_1 = b^2\sigma_{ij}\sigma^{ij}$ co implikuje, że $S_1 \geq 0$.

Rozdział 6

Geometria dualna do hydrodynamiki w przypadku naładowanym

Rozważmy pięciowymiarowe działanie Einsteina Maxwella postaci

$$S \;=\; \frac{1}{16\pi G_N}\int d^5x\sqrt{-g}\left(\frac{12}{L^2}+R-F^2-\frac{4\kappa}{3}\epsilon^{ABCDE}A_AF_{BC}F_{DE}\right), \qquad (6.1)$$

przy czym $12/L^2$ jest stałą kosmologiczną. Działanie (6.1) pojawia się na gruncie kompaktyfikacji teorii supergrawitacji IIB [34, 78, 79], przy czym stała Cherna-Simonsa κ wynosi $1/2\sqrt{3}$. Z uwagi jednak na chęć śledzenia w obliczeniach wyrazów z członem Cherna-Simonsa, za [31] i [30] w toku dalszych rozważań zachowamy ogólną wartość κ.

Działanie (6.1) prowadzi do nastepujących równań ruchu

$$\begin{aligned} G_{AB}-6g_{AB}+2F_{AC}F_B^C+\frac{1}{2}g_{AB}F_{CD}F^{CD} &= 0,\\ \nabla_BF^{AB}+\kappa\epsilon^{ABCDE}F_{BC}F_{DE} &= 0. \end{aligned} \qquad (6.2)$$

Podobnie jak w przypadku nienaładowanym, zdefiniujmy dla wygody

$$\begin{aligned} Ein_{AB} &:= G_{AB}-6g_{AB}+2F_{AC}F_B^C+\frac{1}{2}g_{AB}F_{CD}F^{CD},\\ Mx^A &:= \nabla_BF^{AB}+\kappa\epsilon^{ABCDE}F_{BC}F_{DE}. \end{aligned} \qquad (6.3)$$

Równania (6.3) posiadają rozwiązania postaci sferycznie symetrycznych czarnych dziur, dyskutowane szczegółowo w [34]. Odwołując się do [63], prostym rozwiązaniem (6.3) z planarnym horyzontem zdarzeń jest

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{r^2 f(r)}{L^2} dt^2 + \frac{L^2}{r^2 f(r)} dr^2 + \frac{r^2}{L^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,, \\ A_t &= h(r)\,, \end{aligned} \tag{6.4}$$

gdzie

$$f(r) = \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} - \frac{q^2}{r_0^2 r^4}\right)\,, \tag{6.5}$$

$$h(r) = \frac{\sqrt{3}q}{2L}\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right)\,. \tag{6.6}$$

W terminach korespondencji AdS/CFT, rozwiązania (6.4) są dualne do termodynamiki plazmy w stanie równowagi w płaskiej przestrzeni Minkowskiego. Horyzont zewnętrzny umiejscowiony jest w $r = r_0$. Oprócz niego istnieje również horyzont wewnętrzny, zlokalizowany w $r = r_-$, przy czym

$$r_-^2 = \frac{1}{2} r_0^2 \left(\sqrt{1 + 4\frac{q^2}{r_0^6}} - 1\right)\,. \tag{6.7}$$

Odwołując się do standardowych technik przejścia do przestrzeni Euklidesowej [71, 63], temperatura Hawkinga związana z horyzontem zewnętrznym wynosi [38]

$$T = \frac{r_0}{\pi L^2}\left(1 - \frac{q^2}{2r_0^6}\right)\,. \tag{6.8}$$

Zauważmy, że temperatura ta znika w przypadku ekstremalnej czarnej dziury, odpowiadającym $q^2/r_0^6 = 2$.

Zgodnie z [38], potencjał chemiczny związany jest z zachowaniem asymptotycznym pola cechowania, w naszym przypadku A_M. W terminach r_0 i temperatury Hawkinga, potencjał ten spełnia równanie

$$r_0 = \pi L^2 \frac{T}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3}\frac{\mu^2}{T^2}}\right)\,. \tag{6.9}$$

W toku dalszych rozważań, wygodnie jest użyć współrzędnych, które są nieosobliwe na horyzoncie zewnętrznym. Schwarzschildowskie współrzędne użyte w [38] nie są do tego celu użyteczne, z uwagi na osobliwości na horyzoncie. Podobnie jak miało to miejsce w przypadku nienaładowanym i zgodnie z [25], wybierzemy do tego celu współrzędne Eddingtona-Finkelsteina. Jednakże w odróżnieniu od [25], przeskalujemy dodatkowo współrzędną radialną $r = r' + F(r')$ tak, by uzyskać wygodniejsze cechowanie, tożsame z [26] i identyczne z cechowaniem przyjętym w poprzednim rozdziale. Wówczas rozwiązanie opisujące naładowaną czarną branę przyjmuje postać

$$\begin{aligned} ds^2 &= 2drdt - \frac{r^2 f(r)}{L^2}dt^2 + \frac{r^2}{L^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,, \\ A_t &= \frac{\sqrt{3}q}{2Lr^2}\,, \end{aligned} \tag{6.10}$$

gdzie funkcja f dana jest równaniem (6.5).

6.1 Ogólna postać rozwiązania

W celu znalezienia metryki i potencjału wektorowego dualnych do hydrodynamiki, posłużymy się rachunkiem perturbacyjnym wykorzystującym opisane wcześniej rozwinięcia gradientowe oraz symetrię Weyla. W jego języku, obecność członów z ładunkiem elektrycznym q i stałą Cherna-Simonsa implikuje pojawienie się dodatkowych struktur w g_{AB} i A_B. Oczywiście spodziewamy się, że wszystkie one znikają w granicy nienaładowanej: $q \to 0$, $\kappa \to 0$.

Analizę rozpoczniemy od wprowadzenia podstawowych elementów składowych, z których będziemy budować rozwinięcia gradientowe metryki i potencjału wektorowego. Wielkościami tymi będą czteroprędkość u_μ, wprowadzony przy okazji metryki (5.3) parametr b oraz ładunek elektryczny q. Ograniczymy się przy tym do przypadku $d = 4$ (czasoprzestrzeń pięciowymiarowa) – nie będziemy zatem dokonywać uogólnień poźniejszych wyników na inne, wymiary d, jak miało to miejsce w poprzednim rozdziale.

Prostym rozwiązaniem równań ruchu (6.2) jest metryka[1].

$$\mathrm{d}s^2 = r^2 \left(P_{\mu\nu} - 2Bu_\mu u_\nu\right) \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu - 2u_\mu \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}r, \tag{6.11}$$

[1] Od tej pory przyjmujemy $L = 1$.

gdzie[2]

$$B = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{b^4 r^4}\left(1 + q^2 b^6\right) + \frac{q^2}{r^6}\right), \tag{6.12}$$

natomiast $P_{\mu\nu}$ jest projektorem danym przez (3.6). Parametr b w (6.11) jest odwrotnością pozycji horyzontu zewnętrznego r_0. Rozwiązanie (6.10) można odtworzyć z (6.11) przechodząc do układu w którym $(u^\mu) = (1, 0, 0, 0)$. Potencjał wektorowy stowarzyszony z (6.11) wynosi

$$A = \frac{\sqrt{3}q}{2r^2} u_\mu \mathrm{d}x^\mu. \tag{6.13}$$

W powyższym wzorze, podobnie jak i w późniejszych, przyjęto wygodne cechowanie w którym $A_r = 0$. Opisywana tutaj geometria ma osobliwość w $r = 0$. Osobliwość ta jest jednak schowana pod horyzontem zdarzeń, zlokalizowanym w $r = 1/b$. Przywołując (6.8), temperatura Hawkinga związana z tym horyzontem wynosi

$$T = \frac{1}{2\pi b}(2 - q^2 b^6)\,. \tag{6.14}$$

Podobnie jak w przypadku nienaładowanym, linie stałych x^μ w (6.11) są wchodzącymi zerowymi geodezyjnymi, które dla dużych r rozchodzą się w kierunkach ustalonych przez u^μ, przy czym r jest parametrem afinicznym [44]. Metryka (6.11) dopuszcza również małe fluktuacje na kierunkach transwersalnych, których skala jest znacznie mniejsza niż w kierunku radialnym. Parametrem zadającym skalę tych fluktuacji jest b.

Promując parametry b, q, u^μ do funkcji współrzędnych transwersalnych x^μ, równania ruchu są naruszone przez człony proporcjonalne do gradientów b, q, u^μ. W celu wyeliminowania tych członów, a tym samym zapewnieniu, że równania Einsteina-Maxwella będą nadal spełnione, ogólniejsza postać metryki oraz potencjału wektorowego zawierać musi poprawki w odpowiednim rzędzie rozwinięcia gradientowego. Każda z tych poprawek zbudowana jest ze wszystkich niezależnych struktur tensorowych dopuszczonym w danym rzędzie (członów zbudowanych z określonej liczby pochodnych podstawowych wielkości hydrodynamicznych). Analogicznie jak miało to miejsce w poprzednim rozdziale, rozwiązanie równań ruchu znajdziemy rozwijając wszystkie wielkości w szeregi potęgowe wokół ustalonego punktu, w naszym przypadku $x = 0$. Spodziewamy się przy

[2]Notacja zostala tak wybrana by w granicy nienaładowanej ($q \to 0$, $\kappa \to 0$) B redukowało się do $B(br)$ zdefiniowanego w [26], a pozostałe funkcje maksymalnie przypominały te z [26].

tym, że b, q, u^μ spełniają równania różniczkowe, które mogą być zinterpretowane jako równania hydrodynamiki [25].

Rozwinięcia b, q, u_μ i $h_{\mu\nu}$ są następujące

$$\begin{aligned} u^\mu(x) &= u^\mu(0) + \epsilon\, x^\alpha \partial_\alpha u^\mu(0) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ b(x) &= b(0) + \epsilon x^\alpha \partial_\alpha\, b(0) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ q(x) &= q(0) + \epsilon x^\alpha \partial_\alpha\, q(0) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ h_{\mu\nu}(x) &= \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{6.15}$$

Powyżej przyjęto $u_0^\mu = \{1,0,0,0\}$, $h_{\mu\nu}(0) = \eta_{\mu\nu}$, $\partial_\alpha h_{\mu\nu}(0) = 0$. Weyl-niezmiennicza postać metryki dopuszczająca niewielkie fluktuacje na kierunkach transwersalnych (do drugiego rzędu włącznie), przyjmuje formę identyczną z (5.12):

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathcal{G}_{\mu\nu} - 2u_\mu \mathcal{V}_\nu)\, \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu - 2u_\mu \mathrm{d}x^\mu \left(\mathrm{d}r + r\mathcal{A}_\nu \mathrm{d}x^\nu\right), \tag{6.16}$$

z tym, że funkcje $\mathcal{V}_\nu$ i $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ dane są teraz przez bardziej skomplikowane wyrażenia. Jak poprzednio, obecność koneksji $\mathcal{A}_\nu$ kompensuje pochodne pochodzące z różniczkowania czynnika związanego z Weyl-kowariantnymi tensorami.

Rozważmy teraz rząd po rzędzie konstrukcję metryki i potencjału wektorowego.

Zerowy rząd

Rozwiązanie w zerowym rzędzie jest niczym innym jak rozwiązaniem „pchniętej” naładowanej czarnej brany (6.11). Metryka jest więc w postaci danej przez (5.12) z

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\mu &= r^2 B u_\mu, \\ \mathcal{G}_{\mu\nu} &= r^2 P_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{6.17}$$

(w zasadzie jeśli ograniczamy się do wiądącego rzędu, człony zawierający koneksję Weyla w (5.12) mugą być pominięte, jako że są to wyrażenia pierwszego rzędu).

6.1.1 Pierwszy rząd

Aby znaleźć rozwiązanie w pierwszym rzędzie, musimy sklasyfikować wszystkie struktury tensorowe, jakie mogą się w tym rzędzie pojawić. Zawierać one będą nie więcej niż jedną pochodną na kierunkach transwersalnych. Stosując metody opisane przy okazji przypadku nienaładowanego, otrzymujemy:

- brak Weyl-niezmienniczych skalarów,
- jeden Weyl-niezmienniczy pseudowektor
$$l_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} u^\nu D^\lambda u^\rho, \tag{6.18}$$
- jeden Weyl-niezmienniczy wektor
$$V_{0\mu} = q^{-1} P_\mu^\nu \mathcal{D}_\nu q, \tag{6.19}$$
- jeden Weyl-niezmienniczy, symetryczny, bezśladowy tensor o wadze Weyla $w = -1$, identyczny z tensorem danym przez (3.34):
$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{D}_{(\mu} u_{\nu)}. \tag{6.20}$$

Części składowe metryki $\mathcal{V}_\mu$ i $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ wynoszą:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\mu &= r^2 B u_\mu + r F_1 l_\mu + b r^2 F_0 V_{0\mu}, \\ \mathcal{G}_{\mu\nu} &= r^2 P_{\mu\nu} + 2 b r^2 F_2 \sigma_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{6.21}$$

gdzie F_0, F_1 and F_2 sa funkcjami Weyl-niezmienniczych br i $b^3 q$, które dla uproszczenia pomijamy. Czyniąc to mamy jednak na uwadze, że F_0, F_1 i F_2 w (6.21) oznaczają odpowiednio $F_0(br, b^3 q)$, $F_1(br, b^3 q)$ i $F_2(br, b^3 q)$. Funkcje te są wyznaczone przez rozwiązania równań ruchu w rozwinięciu gradientowym do pierwszego rzędu włącznie. Czynniki b i r zostały wybrane w taki sposób, by zapewnić odpowiednie wagi Weyla (oraz częściowo dla wygody – taki wybór prowadzi do prostej postaci późniejszych równań różniczkowych).

Podobnie, niezmienniczość Weyla implikuje następującą postać potencjału wektorowego:

$$A = \left(\frac{\sqrt{3} q u_\mu}{2 r^2} + Y_0 l_\mu + \tilde{Y}_0 V_{0\mu} \right) \mathrm{d}x^\mu. \tag{6.22}$$

Współczynniki funkcyjne Y_0 i $\tilde{Y}_0$ są funkcjami br i $b^3 q$, otrzymanymi z rozwiązań równań ruchu. Równania te rozwiązujemy podobnie jak w przypadku nienaładowanym, rozwijając je w szeregi potęgowe wokół ustalonego punktu $x = 0$ przy użyciu pakietu opisanego w Dodatku A. By otrzymać postać niewiadomych $F_0, F_1, F_2, Y_0, \tilde{Y}_0$, wstawiamy metrykę i potencjał wektorowy do równań Einsteina-Maxwella, rozwijamy je wokół $x = 0$, a następnie odczytujemy równania różniczkowe, które muszą spełniać szukane współczynniki funkcyjne tak, by całość spełniała równania Einsteina-Maxwella. Równania te można podzielić na dwie klasy: równania więzów, które narzucają warunki konsystencji na funkcje $b(x), q(x), u^\mu(x)$ oraz równania dynamiczne, które określają postać współczynników funkcyjnych. Dyskusję warto rozpocząć od równań więzów. Równaniami tymi są:

$$Ein^r_\mu = 0, \quad Mx^r = 0. \tag{6.23}$$

Implikują one

$$\begin{aligned} \partial_0 b &= \frac{1}{3} b \partial_i u_i, \\ \partial_0 q &= -q \partial_i u_i, \quad \partial_i q = q^{-1} b^{-7} (2 - b^6 q^2) \partial_i b - 2 q^{-1} b^{-6} (1 + b^6 q^2) \partial_0 u_i. \end{aligned} \tag{6.24}$$

W terminach Weyl-niezmienniczych pochodnych, (6.24) prowadzi do

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu b &= \partial_\mu b - \mathcal{A}_\mu b, \\ \mathcal{D}_\mu q &= \partial_\mu q + 3 \mathcal{A}_\mu q \; . \end{aligned} \tag{6.25}$$

Układ (6.25) przepisać można w postaci

$$\begin{aligned} (b^6 q^2 - 2) \mathcal{D}_\mu b &= q b^7 \mathcal{D}_\mu q, \\ u^\mu \mathcal{D}_\mu b &= 0. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Ostatnie równania mogą być zinterpretowane jako równania hydrodynamiki, wynikające z zachowania holograficznych tensora energii-pędu i prądu $U(1)$. Mając rozwiązania równań więzów możemy przejść do analizy równań dynamicznych. W pierwszym rzędzie spełnienie równań Einsteina-Maxwella, prowadzi do następujących równań różniczkowych na współczynniki funkcyjne $F_0, F_1, F_2, Y_0, \tilde{Y}_0$

$$\begin{aligned}
Y_0'' &= -\frac{b^6q^2\left(x^2-3\right)+3x^6+x^2}{x\left(x^2-1\right)\left(-q^2b^6+x^4+x^2\right)}Y_0' - \frac{\sqrt{3}b^3qx^2F_1'}{\left(x^2-1\right)\left(-q^2b^6+x^4+x^2\right)}+ \\
&+ \frac{\sqrt{3}b^3F_1qx}{\left(x^2-1\right)\left(-q^2b^6+x^4+x^2\right)} - \frac{12b^6\kappa q^2}{x^2\left(x^2-1\right)\left(-q^2b^6+x^4+x^2\right)}, \\
\tilde{Y}_0'' &= -\frac{b^6q^2\left(x^2-3\right)+3x^6+x^2}{x\left(x^2-1\right)\left(-q^2b^6+x^4+x^2\right)}\tilde{Y}_0' - \frac{\sqrt{3}b^3qx^3F_0'}{\left(x^2-1\right)\left(-q^2b^6+x^4+x^2\right)}+ \\
&+ \frac{\sqrt{3}b^3qx}{2\left(x^2-1\right)\left(-q^2b^6+x^4+x^2\right)}, \\
F_0'' &= -\frac{4\sqrt{3}b^3q\tilde{Y}_0'}{x^5} - \frac{5F_0'}{x}, \\
F_1'' &= -\frac{4\sqrt{3}b^3qY_0'}{x^4} - \frac{3F_1'}{x} + \frac{3F_1}{x^2}, \\
F_2'' &= \frac{\left(b^6q^2\left(x^2+1\right)-5x^6+x^2\right)}{x\left(x^2-1\right)\left(-q^2b^6+x^4+x^2\right)}F_2' - \frac{3x^3}{\left(x^2-1\right)\left(-q^2b^6+x^4+x^2\right)}.
\end{aligned} \tag{6.27}$$

W powyższych wzorach $x = br$. Tak jak w przypadku nienaładowanym, prim oznacza różniczkowanie po x. Dodatkowo, ponieważ nie ma znaczenia, wokół jakiego punktu budujemy rozwinięcia w szeregi potęgowe, zamieniliśmy b_0, q_0 na b i q.

Rozwiązując (6.27) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
F_0 &= -\frac{1}{2br} + \frac{b^6q^2+2}{4b^4r^4} - \frac{q^2\left(b^6q^2+2\right)}{4r^6\left(b^6q^2+1\right)} + \\
&+ \frac{(b^2r^2-1)(-b^6q^2+b^2r^2+b^4r^4)}{2b^6r^6}\int_{br}^{\infty}\mathrm{d}x\frac{x^4(-b^6q^2(1+2x)+x^2(3+2x+x^2))}{(1+x)^2(-b^6q^2+x^2+x^4)^2}, \\
F_1 &= \frac{\sqrt{3}b^4\kappa q^3}{r^5\left(b^6q^2+1\right)}, \\
F_2 &= \int_{br}^{\infty}\mathrm{d}x\frac{x(1+x+x^2)}{(1+x)(-b^6q^2+x^2+x^4)}, \\
Y_0 &= \frac{3b^4\kappa q^2}{2r^2\left(b^6q^2+1\right)}, \\
\tilde{Y}_0 &= -\frac{\sqrt{3}bq(2+b^6q^2)}{8(1+b^6q^2)r^2} + \\
&+ \frac{\sqrt{3}b^3q}{2}\int_{br}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}\int_{x}^{\infty}\mathrm{d}y\frac{y^4(-b^6q^2(1+2y)+y^2(3+2y+y^2))}{(1+y)^2(-b^6q^2+y^2+y^4)^2}.
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Całkując (6.27) wzięliśmy pod uwagę dwa warunki: normalizowalność metryki i potencjału wektorowego oraz regularność na horyzoncie w zerowym rzędzie[3].

Warto zauważyć, że w granicy nienaładowanej A_μ znika (tak jak tego oczekujemy), natomiast w pierwszym rzędzie jedynym członem z nieznikającym współczynnikiem funkcyjnym w metryce pozostaje człon z funkcją F_2. W granicy $q \to 0$, $\kappa \to 0$ funkcja ta redukuje się do funkcji F, odtwarzając rozwiązanie dyskutowane w poprzednim rozdziale.

6.1.2 Drugi rząd

W drugim rzędzie niezależne, Weyl-niezmiennicze struktury tensorowe, z których budować będziemy części metryki i potencjału wektorowego, tworzy następujący zestaw sześciu skalarów $S_1 \ldots S_6$, pięciu wektorów $V_1 \ldots V_5$ i jedenastu tensorów $T_1 \ldots T_{11}$:

- Skalary:

$$\begin{aligned} S_1 &= b^2\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}, \\ S_2 &= b^2\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}, \\ S_3 &= b^2\mathcal{R}, \\ S_4 &= b^2q^{-2}P^{\mu\nu}D_\mu q D_\nu q, \\ S_5 &= b^2q^{-1}P^{\mu\nu}D_\mu D_\nu q, \\ S_6 &= b^2q^{-1}P^{\mu\nu}l_\mu D_\nu q\,. \end{aligned} \tag{6.29}$$

- Wektory:

$$\begin{aligned} V_{1\mu} &= bP_{\mu\nu}D_\rho\sigma^{\nu\rho}, \\ V_{2\mu} &= bP_{\mu\nu}D_\rho\omega^{\nu\rho}, \\ V_{3\mu} &= bl^\lambda\sigma_{\mu\lambda}, \\ V_{4\mu} &= bq^{-1}\sigma_\mu{}^\alpha D_\alpha q, \\ V_{5\mu} &= bq^{-1}\omega_\mu{}^\alpha D_\alpha q\,. \end{aligned} \tag{6.30}$$

[3] W ogólności, funkcja F_0 zawiera dodatkową stałą całkowania która nie może być ustalona w oparciu o warunki regularności na horyzoncie i normalizowalności. Wrócimy do tego problemu w sekcji (6.2), przy okazji holograficznej rekonstrukcji tensora energii-pędu i prądu $U(1)$.

- Tensory:

$$
\begin{aligned}
T_{1\mu\nu} &= u^\rho D_\rho \sigma_{\mu\nu}, \\
T_{2\mu\nu} &= C_{\mu\alpha\nu\beta} u^\alpha u^\beta, \\
T_{3\mu\nu} &= \omega_\mu{}^\lambda \sigma_{\lambda\nu} + \omega_\nu{}^\lambda \sigma_{\lambda\mu}, \\
T_{4\mu\nu} &= \sigma_\mu{}^\lambda \sigma_{\lambda\nu} - \frac{1}{3} P_{\mu\nu} \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu}, \\
T_{5\mu\nu} &= \omega_\mu{}^\lambda \omega_{\lambda\nu} + \frac{1}{3} P_{\mu\nu} \omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}, \\
T_{6\mu\nu} &= \Pi^{\alpha\beta}_{\mu\nu} D_\alpha l_\beta, \\
T_{7\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta}{}_{\lambda(\mu} C_{\alpha\beta\nu)\sigma} u^\lambda u^\sigma, \\
T_{8\mu\nu} &= q^{-2} \Pi^{\alpha\beta}_{\mu\nu} D_\alpha q D_\beta q, \\
T_{9\mu\nu} &= q^{-1} \Pi^{\alpha\beta}_{\mu\nu} D_\alpha D_\beta q, \\
T_{10\mu\nu} &= q^{-1} \Pi^{\alpha\beta}_{\mu\nu} l_\alpha D_\beta q, \\
T_{11\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon_{(\mu}{}^{\alpha\beta\lambda} \sigma_{\nu)\lambda} u_\alpha q^{-1} D_\beta q \,.
\end{aligned} \tag{6.31}
$$

W (6.31) $\Pi^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$ jest projektorem, służącym do tworzenia symetrycznych, bezśladowych tensorów:

$$
\Pi^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(P^\alpha_\mu P^\beta_\nu + P^\alpha_\nu P^\beta_\mu - \frac{2}{3} P^{\alpha\beta} P_{\mu\nu} \right). \tag{6.32}
$$

Podobnie jak w przypadku nienaładowanym $\mathcal{R}$ został zdefiniowany w [26], natomiast $C_{\mu\alpha\nu\beta}$ oznacza tensor Weyla (3.41). Biorąc pod uwagę (6.18), (6.19), (6.20), (6.29), (6.30) oraz (6.31), do drugiego rzędu włącznie otrzymujemy $\mathcal{V}_\mu$ i $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ postaci

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_\mu &= r^2 B u_\mu + r F_1 l_\mu + b r^2 F_0 V_{0\mu} + r^2 \sum_{i=1}^{6} K_i S_i u_\mu + r \sum_{i=1}^{5} W_i V_{i\mu}, \\
\mathcal{G}_{\mu\nu} &= r^2 P_{\mu\nu} + 2 b r^2 F_2 \sigma_{\mu\nu} + r^2 \sum_{i=1}^{6} L_i S_i P_{\mu\nu} + \sum_{i=1}^{11} H_i T_{i\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{6.33}
$$

W ostatnich wzorach, obok znanych z pierwszego rzędu F_0, F_1, F_2, wprowadziliśmy następujące współczynniki funkcyjne $L_1 ... L_6$, K_1, $... K_6$, W_1, $... W_5$, $H_1 ... H_{11}$. Wszystkie one są funkcjami dwóch wielkości skalarnych: br oraz qb^3. Potencjał wektorowy ma postać:

$$
A = \left(\frac{\sqrt{3} q u_\mu}{2 r^2} + Y_0 l_\mu + \tilde{Y}_0 V_{0\mu} + r \sum_{i=1}^{6} N_i S_i u_\mu + \sum_{i=1}^{5} Y_i V_{i\mu} \right) \mathrm{d}x^\mu. \tag{6.34}
$$

W celu ustalenia 39 funkcji K_i, L_i, N_i $(i = 1, ..., 6)$, W_i, Y_i $(i = 1, ..., 5)$, H_i $(i = 1, ..., 11)$ stosując opisaną wcześniej metodę, ogólną postać metryki i potencjału wektorowego (6.33) i (6.34) wstawiamy do równań (6.2) i rozwijamy wokół $x = 0$ do drugiego rzędu włącznie. Analizę rozpoczynamy od rozwiązania równań więzów (6.23). Równania te narzucają więzy na rozwinięcia q, b, u_μ i $h_{\mu\nu}$. Więzy te prowadzą do następujących związków:

$$\begin{aligned} D_\rho b &= \frac{S_1 u_\rho}{6 - 3b^6 q^2} + \frac{b^6 q^2 S_5 \left(b^6 q^2 + 2\right) u_\rho}{4\left(b^6 q^2 - 2\right)\left(b^6 q^2 + 1\right)} + \frac{b V_{1\rho}}{b^6 q^2 - 2} + \frac{b^{12} q^4 S_4 u_\rho}{-4b^{12} q^4 + 4b^6 q^2 + 8} \\ &+ \frac{b^7 q^2 V_{0\rho}}{2 - b^6 q^2} + \frac{3b^7 q^2 V_{4\rho}}{\left(b^6 q^2 - 2\right)^2} + \frac{2\sqrt{3} b^9 \kappa q^3 S_6 u_\rho}{-q^4 b^{12} + b^6 q^2 + 2}, \\ D_\mu q &= -\frac{q S_5 \left(b^6 q^2 + 2\right) u_\mu}{4\left(b^7 q^2 + b\right)} + \frac{b^5 q^3 S_4 u_\mu}{4b^6 q^2 + 4} + \frac{2\sqrt{3} b^2 \kappa q^2 S_6 u_\mu}{b^6 q^2 + 1} + q V_{0\mu}. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Podobnie jak miało to miejsce w pierwszym rzędzie, ostatnie równania można zinterpretować jako równania hydrodynamiki odpowiadające zachowaniu tensora energii-pędu i prądu $U(1)$. Wrócimy do tego przy okazji holograficznej rekonstrukcji $T^{\mu\nu}$ i J^μ.

Wykorzystując (6.35) można pokazać, ze zachodzi

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu &= \frac{b^7 q^2}{2 - b^6 q^2}(D_\nu V_{0\mu} - D_\mu V_{0\nu}), \\ \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu &= -\frac{1}{3}(D_\nu V_{0\mu} - D_\mu V_{0\nu}). \end{aligned} \tag{6.36}$$

Wynika stąd, że

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = 0, \tag{6.37}$$

$$D_\mu V_{0\nu} - D_\nu V_{0\mu} = 0. \tag{6.38}$$

Przejdźmy teraz do równań dynamicznych. W analogii do przypadku nienaładowanego, równania te dzielimy na sektory: skalarny, wektorowy i tensorowy. Następnie analizujemy elementy rozwinięć gradientowych b, q, u_μ i $h_{\mu\nu}$ w poszczególnych równaniach odpowiednich sektorów, stosując metody opisane w poprzednim rozdziale. Sektor równań skalarnych tworzą

$$Mx_0 = 0, \quad Mx_r = 0, \quad Ein_{00} = 0, \quad Ein_{rr} = 0. \tag{6.39}$$

Z powyższych otrzymujemy równania różniczkowe na funkcje K_i, L_i, N_i ($i = 1...6$). Dalej, w sektorze funkcji wektorowych

$$Mx_1 = 0, \quad Mx_2 = 0, Mx_3 = 0,$$

$$Ein_{1r} = 0, \quad Ein_{2r} = 0, \quad Ein_{3r} = 0, \tag{6.40}$$

dostaniemy związki na W_i oraz Y_i ($i = 1..5$).

Sektor równań tensorowych tworzą

$$Ein_{12} = 0, \quad Ein_{12} = 0, \quad Ein_{23} = 0, \tag{6.41}$$

$$Ein_{11} = 0, \quad Ein_{22} = 0, \quad Ein_{33} = 0. \tag{6.42}$$

Podobnie jak w przypadku nienaładowanym, równania na brakujące współczynniki funkcyjne $H_1 \dots H_{11}$ dostaniemy z analizy (6.41) sprawdzając, że (6.42) będą przez nie spełnione.

Otrzymane równania różniczkowe dają się odcałkować – odpowiednie rozwiązania zebrane są w Dodatku B. Jak poprzednio, ustalając stałe całkowania braliśmy pod uwagę warunki normalizowalności oraz regularności na horyzoncie[4].

6.2 Tensor energii-pędu i prąd U(1)

Obecność ładunku elektrycznego po stronie grawitacyjnej przeklada się na istnienie stowarzyszonego z nim prądu $U(1)$ – J^μ. Dyskusję rozpocznijmy od wyznaczenia $T^{\mu\nu}$, danego przez (5.51). W tym celu potrzebne nam będą krzywizny zewnętrzne oraz zachowanie asymptotyczne znalezionych współczynników funkcyjnych. Generalnie zaprezentowane obliczenia te nie różnią się znacząco od zaprezentowanych w (5.1.1) z tym, że mamy tutaj większą liczbę członów. Z tego względu rachunek jest bardziej kłopotliwy i wymaga uważnego prześledzenia granicy $r \to \infty$. By efektywnie poradzić sobie z potencjalnie rozbieżnymi wyrazami, wygodnie jest zbierać wspólczynniki przy potencjalnie

[4] Część stałych całkowania, które nie mogły być ustalone w oparciu o te warunki została wybrana w taki sposób, by zagwarantować spełnienie warunków Landaua (3.15), dla wyliczonych później tensora energii-pędu i prądu $U(1)$.

rozbieżnych członach, takich jak r czy r^2. Mając to na uwadze i powtarzając etapy obliczeń przedstawione w (5.1.1), otrzymujemy następujący $T_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{1}{16\pi G_N}\Big(\frac{1+b^6q^2}{b^4}(P_{\mu\nu}+3u_\mu u_\nu)-\frac{2\sigma_{\mu\nu}}{b^3}+\frac{2(1+c_1)T_{1\mu\nu}}{b^2}+\frac{2T_{2\mu\nu}}{b^2}+\frac{2c_1\,T_{3\mu\nu}}{b^2}+ \\ &+ \frac{2T_{4\mu\nu}}{b^2}+\frac{4b^4q^2(-1+b^6q^2(12\kappa^2-1))}{1+b^6q^2}T_{5\mu\nu}+\frac{2\sqrt{3}b^7q^3\kappa}{1+b^6q^2}T_{6\mu\nu}+\frac{c_8}{b^2}T_{8\mu\nu}+ \\ &+ \frac{c_9}{b^2}T_{9\mu\nu}+\frac{c_{10}}{b^2}T_{10\mu\nu}\Big), \end{aligned} \tag{6.43}$$

gdzie

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{b^6q^2+1}{2}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{-b^6q^2+x+x^2}, \\ c_8 &= \int_1^\infty \mathrm{d}x\, p_8(x), \quad c_9 = \int_1^\infty \mathrm{d}x\, p_9(x), \quad c_{10} = \int_1^\infty \mathrm{d}x\, p_{10}(x), \end{aligned}$$

z $p_8(x)$, $p_9(x)$, $p_{10}(x)$ zdefiniowanych w Dodatku B (razem z rozwiązaniami równań drugiego rzędu).

Rezultat (6.43) pokrywa się z wynikiem przedstawionym w [26] dla $d = 4$ w granicy $q \to 0$, $\kappa \to 0$. Mając (6.43) można z łatwością odczytać współczynniki transportu. Zauważmy, że równanie stanu ma postać $\rho = 3p$ czyli dokładnie tak, jak tego oczekujemy dla teorii konforemnej, przy czym

$$\rho = \frac{3}{16\pi G_N}\left(\frac{1}{b^4}+b^2q^2\right). \tag{6.44}$$

Ostatnia formuła ukazuje interesującą dualność – niezmienniczość względem przekształceń:

$$\begin{aligned} b^2 &\longrightarrow \frac{1}{bq}, \\ q^2 &\longrightarrow \frac{q}{b^3}. \end{aligned} \tag{6.45}$$

Pod wpływem tych przekształceń odwróceniu ulega Weyl-niezmiennicza wielkość b^3q:

$$b^3q \longrightarrow \frac{1}{b^3q}. \tag{6.46}$$

Dualność tę można również w prosty sposób przepisać w terminach temperatury T i potencjału chemicznego μ.

Holograficzny prąd $U(1)$[5] dany jest następującą formułą [31]

$$J_\mu = \lim_{r\to\infty} \frac{r^2 A_\mu}{8\pi G_N}. \tag{6.47}$$

Wstawiając do powyższego wzoru asymptotyki potencjału wektorowego, dostajemy

$$\begin{aligned} J_\mu &= \frac{1}{8\pi G_N}\Big(\frac{\sqrt{3}qu_\mu}{2} + \frac{3b^4q^2\kappa l_\mu}{2(1+b^6q^2)} - \frac{\sqrt{3}b^3q(2+b^6q^2)}{8(1+b^6q^2)b^2}V_{0\mu} + \frac{3\sqrt{3}bq}{8(1+b^6q^2)}V_{1\mu} + \\ &+ \frac{3\sqrt{3}b^7q^3\kappa^2}{(1+b^6q^2)^2}V_{2\mu} - \frac{3b^4\kappa q^2}{2\left(b^6q^2+1\right)^2}V_{3\mu} + \frac{2a_4\left(b^6q^2+1\right)+\sqrt{3}b^9q^3}{16b^2\left(b^6q^2+1\right)^2}V_{4\mu} + \\ &+ \frac{a_5\left(b^6q^2+1\right)+\sqrt{3}b^9\left(24\kappa^2-1\right)q^3-\sqrt{3}b^3q}{8b^2\left(b^6q^2+1\right)^2}V_{5\mu}\Big). \end{aligned} \tag{6.48}$$

przy czym stałe a_4 i a_5 zostały zdefiniowane w Dodatku B. Postać (6.48) zawiera wartości współczynników związane z transportem ładunku.

Warto zaznaczyć, że zarówno metryka jak i potencjał wektorowy zawierają w ogólności dodatkowe stałe całkowania, które nie mogą być wyznaczone w oparciu o warunki regularności na horyzoncie i normalizowalności metryki oraz potencjału wektorowego. W ostatecznych rozwiązaniach, przyjęliśmy taki ich wybór, który gwarantował spełnienie warunków Landaua (3.15) dla $T^{\mu\nu}$ i J^μ. Podobnie jak miało to miejsce w przypadku nienaładowanym, warunki te jednoznacznie określają wszystkie stałe całkowania w metryce i potencjale wektorowym.

6.3 Struktura przyczynowa

6.3.1 Horyzont zdarzeń

W niniejszej sekcji zastosujemy metodologię opisaną w (4.2) i (5.2.1) dla metryki z ładunkiem elektrycznym i członem Cherna-Simonsa. Zaczniemy od wypisania najogólniejszej formy funkcji skalarnej $S(r,x)$, generującej równanie hiperpowierzchni horyzontu. Rozwinięcie gradientowe $S(r,x)$ dane jest przez (5.67), przy czym $g(x) = g_0(x) + g_1(x) +$

[5]Fizyczny prąd, którego zerowa składowa zadaje gęstość energii różni się od zaprezentowanego o czynnik 2π, co jest wynikiem zaadoptowanej wcześniej tu normalizacji potencjału chemicznego.

$g_2(x) + ...$ we wzorze (5.68) będzie teraz Weyl niezmienniczą funkcją zależną od dwóch argumentów: b i q. Ponieważ w zerowym rzędzie nie mamy niezmienniczych skalarów, $g_0(x)$ jest funkcją o wadze Weyla zero, tzn. zależy jedynie od b^3q. Dalej, przywołując (6.29) widzimy, że w pierwszym rzędzie również nie ma skalarów, mamy natomiast sześć skalarów w rzędzie drugim. Pociąga to za sobą:

$$\begin{aligned} g_0(x) &= 1 \\ g_1(x) &= 0 \\ g_2(x) &= \sum_{k=1}^{6} h_k^{(EH)}(b^3q)S_k\,, \end{aligned} \tag{6.49}$$

przy czym S_i dane są przez (6.29), natomiast współczynniki $h_i^{(EH)}$ zostaną określone w toku dalszej analizy. W przeciwieństwie do przypadku nienaładowanego, $h_i^{(EH)}$ nie są stałymi współczynnikami, a funkcjami zmiennej qb^3 (dla wygody później będziemy opuszczać ten argument).

Ogólne wyrażenie na pozycję horyzontu zdarzeń jest postaci

$$r_{EH} = \frac{1}{b}\left(\lambda + \sum_{k=1}^{6} h_k^{(EH)} S_k\right)\,. \tag{6.50}$$

Wektor normalny do hiperpowierzchni $S(r,x) = const$ (4.7) wynosi

$$m = r\ db + b\ dr + d\lambda\,. \tag{6.51}$$

Przepisując powyższe w terminach Weyl-kowariantnych pochodnych $\mathcal{D}_\mu b$ i $\mathcal{D}_\mu q$, mamy

$$m = \left(r\mathcal{D}_\mu b + \lambda'\left(b^3\mathcal{D}_\mu q + 3qb^2\mathcal{D}_\mu b\right)\right)dx^\mu + b\left(dr + r\mathcal{A}_\mu dx^\mu\right)\,. \tag{6.52}$$

Horyzont zdarzeń jest zerową hiperpowierzchnią, której równanie zadaje $m^2 = 0$. We wiodącym rzędzie warunek ten ma dwa rozwiązania: $\lambda = 1$, co odpowiada horyzontowi zewnętrznemu w zerowym rzędzie i $\lambda = r_-$, gdzie r_- jest dany przez (6.7). Ten ostatni jest horyzontem wewnętrznym naładowanej czarnej brany. Krótką dyskusję horyzontu wewnętrznego przedstawimy pod koniec tej sekcji; pokażemy przy tym, że związane są z nim osobliwości wykluczające użycie formalizmu rozwinięć gradientowych.

Kładąc w (6.52) $\lambda = 1$ i wstawiając do niego otrzymane wcześniej postaci $\mathcal{D}_\mu b$ oraz $\mathcal{D}_\mu q$ dane przez (6.35), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} m_\mu &= brA_\mu + \frac{b^7 q^2 r V_{0\mu}}{2 - b^6 q^2} + \frac{r S_1 u_\mu}{6 - 3b^6 q^2} + \frac{b^6 q^2 r S_5 \left(b^6 q^2 + 2\right) u_\mu}{4\left(b^6 q^2 - 2\right)\left(b^6 q^2 + 1\right)} + \\ &+ \frac{brV_{1\mu}}{b^6 q^2 - 2} + \frac{b^{12} q^4 r S_4 u_\mu}{-4b^{12} q^4 + 4b^6 q^2 + 8} + \frac{3b^7 q^2 r V_{4\mu}}{\left(b^6 q^2 - 2\right)^2} + \frac{2\sqrt{3} b^9 \kappa q^3 r S_6 u_\mu}{-q^4 b^{12} + b^6 q^2 + 2}, \\ m_r &= b. \end{aligned} \tag{6.53}$$

Równanie $m^2 = 0$ ustala wszystkie funkcje pojawiające się w (6.50). Uwzględniając (6.53), znajdujemy horyzont zewnętrzny dany przez (6.50) z $h_k^{(EH)}$ postaci

$$\begin{aligned} h_1^{(EH)} &= \frac{3\left(b^6 q^2 - 2\right) K_1\left(b^3 q, 1\right) + 1}{3\left(b^6 q^2 - 2\right)^2}, \\ h_2^{(EH)} &= \frac{2b^{12} \kappa^2 q^4}{5\left(b^6 q^2 + 1\right)^2} - \frac{9 - 2b^6 q^2}{12(2 - b^6 q^2)}, \\ h_3^{(EH)} &= -\frac{1}{12(2 - b^6 q^2)}, \\ h_4^{(EH)} &= \frac{K_4\left(b^3 q, 1\right)}{b^6 q^2 - 2} + \frac{b^{12} q^4\left(17b^{12} q^4 + 28b^6 q^2 + 20\right)}{32\left(b^6 q^2 - 2\right)^3\left(b^6 q^2 + 1\right)^2}, \\ h_5^{(EH)} &= \frac{K_5\left(b^3 q, 1\right)}{b^6 q^2 - 2} - \frac{b^6 q^2\left(b^6 q^2 + 2\right)}{4\left(b^{18} q^6 - 3b^{12} q^4 + 4\right)}, \\ h_6^{(EH)} &= \frac{4\left(b^{18} q^6 - 3b^6 q^2 - 2\right) K_6\left(b^3 q, 1\right) + \sqrt{3} b^9 \kappa q^3\left(b^6 q^2 + 4\right)\left(3b^6 q^2 + 2\right)}{4\left(-b^{12} q^4 + b^6 q^2 + 2\right)^2}. \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że w granicy $q \to 0$ powyższy wzór redukuje się do (5.75) (dla $d = 4$) i co za tym idzie pozostaje zgodny z [26].

Wewnętrzny horyzont zdarzeń do drugiego rzędu włącznie dany jest wyrażeniem

$$r = r_- + h_1 S_1 + h_2 S_2 + h_3 S_3 + h_4 S_4 + h_5 S_5 + h_6 S_6, \tag{6.54}$$

gdzie współczynniki funkcyjne h_i zostały przedstawione w Dodatku C. Przyglądając się jawnym postaciom tych funkcji widzimy, że część z nich rozbiega się na wewnętrznym horyzoncie zdarzeń w $r = r_-$. Osobliwości tego typu są bezpośrednią konsekwencją osobliwego zachowania metryki i potencjału wektorowego na horyzoncie wewnętrznym, począwszy od pierwszego rzędu. Ostatni fakt wskazuje na załamywanie się rachunku bazującego na rozwinięciach gradientowych we wspomnianym obszarze.

Interesującym wydaje się zbadanie granicy ekstremalnej w której $r_- = 1/b$, a oba horyzonty zdarzeń: zewnętrzny i wewnętrzny pokrywają się. Granica ta odpowiada $b^3 q = \sqrt{2}$. W tym przypadku poprawki z rozwinięć gradientowych na horyzoncie zawierają rozbieżne całki. Raz jeszcze implikuje to, że konstrukcja rozwinięć gradientowych traci sens w granicy ekstremalnej [30].

6.3.2 Horyzont pozorny

Analogicznie jak miało to miejsce w przypadku horyzontu zdarzeń, poniżej powtórzymy kroki przedstawione w (4.3) oraz (5.2.2) dla przypadku geometrii dualnej do hydrodynamiki z zachowanym prądem. Niech jak poprzednio Δ oznacza zależny od czasu horyzont pozorny, będący zbiorem hiperpowierzchni zdefiniowanych przez Weyl-niezmienniczą, skalarną funkcję $S(r,x)$. W rozwinięciu gradientowym do drugiego rzędu mamy

$$r_{AH} = \frac{1}{b}\left(1 + \sum_{k=1}^{6} h_k^{(AH)} S_k\right) . \tag{6.55}$$

Weyl-niezmienniczy wektor v, normalny do marginalnie zewnętrznych powierzchni złapanych, które foliują horyzont Δ wynosi

$$v^\mu = b\left(u^\mu + b\left(a_0 {V_0}^\mu + a_1 l^\mu + \sum_{k=1}^{5} c_k V_k^\mu\right) + u^\mu \sum_{k=1}^{6} e_k S_k\right) . \tag{6.56}$$

Zauważmy, że w przeciwieństwie do przypadku nienaładowanego dyskutowanego w (5.2.2) mamy tutaj człony w pierwszym rzędzie. Dodatkowo współczynniki a_k, c_k, e_k są funkcjami qb^3 (dla uproszczenia zapisu opuściliśmy ten argument). Wykorzystując (6.56) oraz przywołując (5.77) (i związane z nim rozumowanie), można pokazać, że r-owa składowa v wynosi

$$v^r = -brA_\mu u^\mu - ru^\mu \mathcal{D}_\mu b - br\left(bA_\mu + \mathcal{D}_\mu b\right)\left(a_0 {V_0}^\mu + a_1 l^\mu\right) . \tag{6.57}$$

Nakładając wygodny warunek unormowania (4.10) łatwo pokazać, że człony podłużne w v^μ znikają: $e_k = 0$ dla $k = 0, \ldots, 6$. Pozostałe współczynniki funkcyjne ustala warunek Frobeniusa (4.9). Znikanie $v_{[\mu}\partial_\nu v_{\rho]}$ jest automatyczne, podczas gdy warunki $v_{[r}\partial_\nu v_{\rho]} = 0$

są już nietrywialne i ustalają pozostałą dowolność w v. W pierwszym rzędzie rozwinięć gradientowych mamy

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{3b^6q^2\left(b^6q^2+2\right)}{4\left(b^{12}q^4-b^6q^2-2\right)}, \\ a_1 &= -\frac{\sqrt{3}b^9\kappa q^3}{b^6q^2+1}, \end{aligned} \tag{6.58}$$

podczas gdy w drugim

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{b^6q^2-2} - W_1\left(b^3q,1\right), \\ c_2 &= \frac{1}{2} - \frac{6b^{12}q^4\kappa^2}{(1+b^6q^2)^2}, \\ c_3 &= \frac{2\sqrt{3}b^9\kappa q^3F_2\left(b^3q,1\right)}{b^6q^2+1} - W_3\left(b^3q,1\right), \\ c_4 &= \frac{3b^6q^2}{\left(b^6q^2-2\right)^2} + \frac{3b^6q^2\left(b^6q^2+2\right)F_2\left(b^3q,1\right)}{2\left(b^6q^2-2\right)\left(b^6q^2+1\right)} - W_4\left(b^3q,1\right), \\ c_5 &= -W_5\left(b^3q,1\right). \end{aligned} \tag{6.59}$$

By pokazać, że warunek Frobeniusa (4.9) jest faktycznie spełniony, należy wykorzystać wcześniej otrzymane związki (6.37), (6.38), które implikują, że komutatory $[\partial_\mu, \mathcal{A}_\nu]$ oraz $[\mathcal{D}_\mu, V_{0\nu}]$ są trzeciego rzędu na rozwiązaniach hydrodynamiki.

Tym sposobem pokazaliśmy, że podobnie jak w przypadku nienaładowanym (5.2.2), wektor zadający foliację v nie zawiera jakichkolwiek dowolności, o ile tylko zadaliśmy Δ. Podobnie przywołując dyskusję opisaną przy okazji (5.2.2), wydaje się prawdopodobne, że zachodzi to również dla wyższych rzędów rozwinięcia gradientowego (począwszy od trzeciego). Dalej, również w analogii do przypadku nienaładowanego, ponieważ warunek Frobeniusa został narzucony na pełną czasoprzestrzeń, a nie na sam horyzont, wektor v zadaje foliację pełnej czasoprzestrzeni, przynajmniej w jego pobliżu.

Zerowe normalne do liści foliacji Δ zadane są przez (4.11), z parametrem ewolucji $C = \frac{1}{2}v^2$. Jak pamiętamy, znak parametru ewolucji informuje czy Δ jest przestrzenne ($C > 0$), czasowe ($C < 0$) czy zerowe ($C = 0$).

Aby ustalić pozycję horyzontu pozornego, koniecznym staje się obliczenie ekspancji

$\theta_{(\ell)}$ i $\theta_{(n)}$ danych przez (4.3). Wykorzystując jawną postać metryki otrzymujemy

$$\theta_{(\ell)} = 3bBr + \sum_{k=1}^{6} \theta_{(\ell)}^{(k)} S_k, \tag{6.60}$$

$$\theta_{(n)} = -\frac{3}{br} + \sum_{k=1}^{6} \theta_{(n)}^{(k)} S_k, \tag{6.61}$$

przy czym współczynniki funkcyjne $\theta_{(\ell)}^{(k)}$ and $\theta_{(n)}^{(k)}$ zostały zebrane w Dodatku D. Zauważmy, że powyższy rezultat jest Weyl-niezmienniczy. W szczególności, (6.60) nie zawiera członów w pierwszym rzędzie, co jest odbiciem faktu, że nie ma tutaj niezależnych, Weyl-niezmienniczych skalarów. Mając (6.60) można już łatwo wyznaczyć położenie horyzontu pozornego. Położenie to zadane jest równaniem $\theta_{(\ell)}(r_{AH}) = 0$. Rozwiązując je do drugiego rzędu włącznie, dostajemy horyzont postaci (6.55), ze współczynnikami:

$$\begin{aligned}
h_1^{(AH)} &= \frac{K_1\left(b^3 q, 1\right)}{b^6 q^2 - 2}, \\
h_2^{(AH)} &= \frac{9 - 2b^6 q^2}{12\left(b^6 q^2 - 2\right)} + \frac{2b^{12}\kappa^2 q^4}{5\left(b^6 q^2 + 1\right)^2}, \\
h_3^{(AH)} &= \frac{1}{12\left(b^6 q^2 - 2\right)}, \\
h_4^{(AH)} &= \frac{K_4\left(b^3 q, 1\right)}{b^6 q^2 - 2} + \frac{b^6 q^2\left(b^{24} q^8 - 102 b^{18} q^6 - 244 b^{12} q^4 - 232 b^6 q^2 - 64\right)}{32\left(b^6 q^2 - 2\right)^4\left(b^6 q^2 + 1\right)^2}, \\
h_5^{(AH)} &= \frac{K_5\left(b^3 q, 1\right)}{b^6 q^2 - 2} - \frac{b^6 q^2\left(b^6 q^2 + 2\right)}{4\left(b^6 q^2 - 2\right)^2\left(b^6 q^2 + 1\right)}, \\
h_6^{(AH)} &= \frac{K_6\left(b^3 q, 1\right)}{b^6 q^2 - 2} + \frac{\sqrt{3} b^9 \kappa q^3\left(3 b^{12} q^4 + 14 b^6 q^2 + 8\right)}{4\left(b^6 q^2 - 2\right)^2\left(b^6 q^2 + 1\right)^2}.
\end{aligned} \tag{6.62}$$

Łatwo sprawdzić, że powyższa formuła redukuje się do (5.75) w granicy $q \to 0$, $\kappa \to 0$. Jak pamiętamy z poprzedniego rozdziału, w przypadku nienaładowanym (zob. [54, 50]) różnica miedzy horyzontem zdarzeń, a horyzontem pozornym przejawia się w różnicy w członach h_1. W przypadku naładowanym, porównując (6.54) z (6.62) stwierdzamy, że oba horyzonty różnią się dodatkowo członem przy skalarze S_4:

$$h_1^{(EH)} = h_1^{(AH)} + \frac{1}{3(b^6q^2-2)^2} \tag{6.63}$$

$$h_4^{(EH)} = h_4^{(AH)} + \frac{b^6q^2\left(b^6q^2+2\right)^2}{2\left(b^6q^2-2\right)^4}\,. \tag{6.64}$$

Wyrażenie

$$r_{EH} - r_{AH} = \frac{1}{b}\frac{1}{\left(b^6q^2-2\right)^2}\left(\frac{1}{3}S_1 + \frac{b^6q^2}{2}\frac{\left(b^6q^2+2\right)^2}{\left(b^6q^2-2\right)^2}S_4\right) \geq 0, \tag{6.65}$$

jawnie pokazuje[6], że horyzont pozorny znajduje się wewnątrz bądź pokrywa się z horyzontem zdarzeń w tym sensie, że wchodzące radialne zerowe geodezyjne najpierw przecinają horyzont zdarzeń, a następnie horyzont pozorny. W podobny sposób łatwo jest sprawdzić, że horyzont pozorny jest zerowy bądź przestrzenny

$$C(r_{AH}) = \frac{1}{(2-b^6q^2)}\left(\frac{1}{3}S_1 + \frac{b^6q^2}{2}\frac{\left(b^6q^2+2\right)^2}{\left(b^6q^2-2\right)^2}S_4\right) \geq 0\,, \tag{6.66}$$

a więc dokładnie tak, jak tego oczekujemy.

[6]Oba skalary S_1 i S_4 są dodatnie.

Rozdział 7

Prądy entropii

Poniżej znajdziemy holograficzne prądy entropii związane z horyzontem zdarzeń i horyzontem pozornym dla metryk dualnych do hydrodynamiki przy braku jakichkolwiek zachowanych prądów oprócz tensora energii-pędu (przypadek nienaładowany) oraz zachowanym prądem $U(1)$ (przypadek naładowany).

7.1 Przypadek nienaładowany

Przywołując dyskusję zaprezentowaną w (3.1) widzimy, że prąd entropii jest wielkością hydrodynamiczną, dającą się skonstruować w ramach rozwinięcia gradientowego. Zerowy rząd rozwinięcia odpowiada przypadkowi globalnej równowagi termodynamicznej, w którym to możemy przypisać układowi termodynamiczną entropię. Kolejne wyrazy reprezentują stany nierównowagowe. W ogólności, człony wyższych rzędów można zbudować ze wszystkich możliwych, dopuszczonych przez symetrię wektorów. W przypadku nienaładowanym mamy pięć takich członów: trzy człony podłużne związane z trzema skalarami S_1, S_2, S_3 i dwa człony poprzeczne związane z wektorami $V_{1\mu}$ i $V_{2\mu}$. Ogólne wyrażenie na hydrodynamiczny prąd entropii jest więc następujące:

$$S^\mu = j_0 \left(u^\mu + b \sum_{k=1}^{2} j_k^\perp V_k^\mu + \left(\sum_{k=1}^{3} j_k^{||} S_k \right) u^\mu \right) . \tag{7.1}$$

Współczynnik j_0 jest stałą proporcjonalności dobraną w taki sposób, by w zerowym rzędzie S^0 odtwarzało gęstość entropii. Współczynniki $j_k^\perp$ oraz $j_k^{||}$ muszą być wybrane w taki sposób, by zagwarantować, że dywergencja prądu entropii (7.1) będzie nieujemna na rozwiązaniach równań hydrodynamiki.

Dywergencja prądu entropii (7.1) do trzeciego rzędu rozwinięcia gradientowego wynosi

$$\begin{aligned}
j_0^{-1} b^{d-4} \mathcal{D}_\mu S^\mu &= \frac{2b}{d}\sigma^{\mu\nu}\Bigg[\sigma_{\mu\nu} - bd(d-2)\left(j_3^{\|} - \frac{2(j_2^{\|}+j_2^{\perp})}{d-2}\right)\omega_{\mu\lambda}\omega^{\lambda}{}_{\nu} \\
&- bd(d-2)\left(j_3^{\|} + \frac{1}{d(d-2)}\right)\left(\sigma_\mu{}^\lambda\sigma_{\lambda\nu} + u^\lambda\mathcal{D}_\lambda\sigma_{\mu\nu} + C_{\mu\alpha\nu\beta}u^\alpha u^\beta\right) + \\
&+ \left((j_1^{\|} - j_1^{\perp})bd + \tau_\omega\right)u^\lambda\mathcal{D}_\lambda\sigma_{\mu\nu}\Bigg] \\
&+ b^2(j_1^{\perp} + 2j_3^{\|})\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}_\nu\sigma^{\mu\nu} + \ldots \qquad (7.2)
\end{aligned}$$

W powyższym wzorze wstawiliśmy jawną postać skalarów $S_1, ..., S_3$ oraz wektorów $V_{1\mu}$ i $V_{2\mu}$ daną przez (5.28), (5.29). Powtarzając rozumowanie przedstawione w [11] dla $d = 4$, można ustalić niektóre współczynniki występujące w (7.1). Argumenty pozwalające to zrobić bazują na obserwacji, że lokalna nieujemność powinna zachodzić w sytuacji, gdy tensor lepkości (człon z $\sigma_{\mu\nu}$) znika w dowolnym punkcie, jak również wówczas, gdy jest on dowolnie mały (jeśli jest dostatecznie duży, wówczas $\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ jest wkładem dominującym i nie ma jakichkolwiek innych więzów). Pierwszy warunek implikuje

$$j_1^{\perp} = -2j_3^{\|}, \qquad (7.3)$$

podczas gdy drugi zeruje wszystkie wkłady naruszające nieujemność dla bardzo małych $\sigma_{\mu\nu}$:

$$j_2^{\|} + j_2^{\perp} = \frac{1}{2}(d-2)\,j_3^{\|} \quad \text{and} \quad j_3^{\|} = -\frac{1}{d(d-2)}. \qquad (7.4)$$

Zauważmy, że $j_2^{\perp}$ pojawia się w dywergencji jedynie w kombinacji $j_2^{\|} + j_2^{\perp}$. Przeskalowując $j_2^{\perp}$ i $j_2^{\|}$ z zachowaniem ich sumy, nie zmieniamy dywergencji. Dowolność pojawia się więc jako wynik modyfikacji prądu entropii poprzez dodanie członu o zerowej dywergencji [26, 44, 54], co jednocześnie nie zmienia lokalnego tempa produkcji entropii. Ponieważ w trzecim rzędzie rozwinięcia gradientowego nie ma dalszych więzów, $j_1^{\|}$ pozostaje jedynym nieokreślonym parametrem w dywergencji prądu entropii (7.2). Co więcej, rezultaty przedstawione w [44, 26] oraz [54] pokazują, że $j_1^{\|}$ nie jest ustalane w toku analizy wyrazów wyższych rzędów – dualna, grawitacyjna konstrukcja gwarantująca nieujemność dywergencji musi zawierać więc w sobie dowolność w $j_1^{\|}$. Wynika stąd, że jeśli pojęcie lokalnej produkcji entropii dla układów bliskich stanowi równowagi ma sens, musi istnieć dodatkowy wiąz na hydrodynamiczny prąd entropii.

Problem konstrukcji kandydata na hydrodynamiczny prąd entropii po stronie grawitacyjnej dualności AdS/CFT został po raz pierwszy poruszony w [44], a następnie uogólniony na przypadek słabo zakrzywionych przestrzeni brzegowych w dowolnych wymiarach w [26]. Artykuły te opierają się na użyciu tzw. mapy przestrzenno-brzegowej [1]. Mapa ta zdefiniowana jest przez zerowe geodezyjne, uzupełnione o dyfeomorfizmy brzegowe przekształcające formę horyzontu, bądź dowolnej innej hiperpowierzchni spełniającej twierdzenie Hawkinga o polu, w dualny prąd o nieznikającej dywergencji. Główną motywacją dla mapowania wzdłuż wchodzących zerowych geodezyjnych jest przyczynowość. Warunek ten dla mapy przestrzenno-brzegowej jest samozgodny tylko i wyłacznie wtedy, gdy entropia jest przyczynowa[2]. Wielkość taką otrzymamy wybierając jako horyzont, horyzont pozorny. Ten ostatni, wraz z horyzontem zdarzeń, należy do zbioru tzw. „uogólnionych horyzontów”, wprowadzonych w [54].

Punktem startowym w rozważaniach nad geometryczną definicją grawitacyjnego prądu entropii jest pole wektorowe v, styczne do horyzontu Δ. Zgodnie z przewidywaniami

[1] Mapa przestrzenno-brzegowa przyporządkowuje punkty na horyzoncie pozornym, horyzoncie zdarzeń bądź jakiejkolwiek innej hiperpowierzchni spełniającej twierdzenie Hawkinga o polu, punktom leżącym na tej samej zerowej geodezyjnej, przesuniętym w pobliże brzegu w kierunku ustalonym przez zadane pole wektorowe. W zerowym rzędzie pole to jest proporcjonalne do u^μ, natomiast w pierwszym rzędzie dochodzą poprawki modyfikujące prąd entropii w drugim rzędzie. W zastosowanym przez nas cechowaniu (5.64), mapa przestrzenno-brzegowa działa trywialnie na punkty o tej samej współrzędnej x^μ. Należy przy tym pamiętać, że każda taka mapa może być uogólniona poprzez wybór dyfeomorfizmu brzegowego, generowanego innym wektorem na brzegu. Wektor taki, o ile jest niezerowy, we wiodącym rzędzie rozwinięcia gradientowego musi być proporcjonalny do u^μ – to z kolei modyfikuje dualny prąd entropii w rzędzie drugim i wyższych. Okazuje się, że jedynym parametrem w (7.1), zmienianym przez wspomniany dyfeomorfizm jest $j_1^{\|}$. Szczegółowa dyskusja problemu mapy przestrzenno-brzegowej została przedstawiona w [44].

[2] Osłabienie warunku przyczynowości dla mapy przestrzenno-brzegowej nie było jak dotąd dyskutowane. W tym miejscu należy jednak nadmienić, że chociaż mapowanie wzdłuż wbiegających zerowych geodezyjnych wydaje się przyczynowe, brzegowe dyfeomorfizmy odpowiadające tej mapie mogą w ogólności prowadzić do pogwałcenia przyczynowości.

[54], w kontekście horyzontów uogólnionych, będących hiperpowierzchniami spełniającymi twierdzenie Hawkinga o polu, jedną z motywacji wyboru wektora v jest to, że zmiana formy powierzchni na horyzoncie może być wyrażona w terminach ekspansji θ wzdłuż v

$$\theta_{(v)} = \frac{1}{\sqrt{q}} \mathcal{L}_v \sqrt{q} \, , \tag{7.5}$$

gdzie q jest wyznacznikiem metryki indukowanej q_{AB} (4.2). Drugą zasadę termodynamiki możemy następnie przetłumaczyć na warunek niemalejącej powierzchni:

$$\theta_{(v)} \geq 0 \, . \tag{7.6}$$

Na horyzoncie pozornym powierzchnia ta jest dana przez $\theta_{(\ell)} = 0$, $\theta_{(n)} < 0$ i $C \geq 0$. Odpowiedni prąd może być otrzymany z v, poprzez przepisanie lewej strony (7.6) dla zadanej mapy przestrzenno-brzegowej. Tak skonstruowany prąd jest kandydatem na prąd entropii. Zgodnie z [54], wynosi on

$$S^\mu = \frac{1}{4G_N} \frac{1}{b} \sqrt{\frac{G}{g}} \, v^\mu \, . \tag{7.7}$$

Czynnik normalizacyjny w (7.7) wyznaczony jest przez warunek zgodności z termodynamiczną entropią w zerowym rzędzie. Dodatkowo warunek (4.10) gwarantuje, że dywergencja S^μ jest proporcjonalna do ekspansji v, w związku z czym druga zasada termodynamiki (7.6) jest spełniona.

Łatwo sprawdzić, że formuła (7.7) obowiązuje dla trywialnej mapy przestrzenno-brzegowej wzdłuż zerowych geodezyjnych, które w pobliżu brzegu skierowane są wzdłuż wektora u^μ. W przypadku konforemnym, kierunek ten może być zmodyfikowany jedynie poprzez człony drugiego i wyższych rzędów, które modyfikują prąd entropii poczynając od trzeciego rzędu, a zatem są poza obszarem zainteresowań niniejszej pracy. Dalej, zaprezentowana tu mapa przestrzenno-brzegowa nie zawiera brzegowych dyfeomorfizmów częściowo z powodu problemów z przyczynowością (zob. [50]). Ostatni fakt implikuje, że (7.7) prowadzi do jednoznacznej definicji prądu entropii do drugiego rzędu włącznie.

Wyznacznik metryki G może być wyrażony jako

$$G = r^{2(d-1)} g \left(1 - K_1(1) S_1 + \frac{1}{2} \frac{1}{(br)^2} S_2 \right) \, . \tag{7.8}$$

Wektor v jest jednoznacznie określony przez warunki samozgodności i dany przez (5.78) oraz (5.79). Prawa strona (7.7) na horyzoncie pozornym (5.88), przy wykorzystaniu (7.8) prowadzi do prądu (7.1), ze współczynnikami $j_1^{\perp}$ i $j_2^{\perp}$

$$j_1^{\perp} = \frac{2}{d\,(d-2)}, \quad j_2^{\perp} = \frac{1}{d-2}. \tag{7.9}$$

Współczynniki $j_i^{||}$ zależą od radialnej pozycji horyzontu i dla horyzontu pozornego, wynoszą

$$\begin{aligned} j_{1AH}^{||} &= -K_1(1) - \frac{1}{d}K_2(1) + \frac{2\,(d-1)}{d\,(d-2)}, \\ j_{2AH}^{||} &= \frac{(2-3d)}{2d\,(d-2)}, \\ j_{3AH}^{||} &= -\frac{1}{d\,(d-2)}\,. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Można łatwo pokazać, że współczynniki (7.10) spełniają warunki (7.3) i (7.4). W analogiczny sposób, wykorzystując formułę (7.7), jesteśmy w stanie znaleźć prąd entropii związany z horyzontem zdarzeń[26, 54]. Oba prądy pokrywają się z dokładnością do członów podłużnych w drugim rzędzie przy skalarze S_1:

$$j_{1EH}^{||} - j_{1AH}^{||} = \frac{4}{d^2} \tag{7.11}$$

($j_{1EH}^{||}$ dotyczy horyzontu zdarzeń, $j_{1AH}^{||}$ horyzontu pozornego). Przywołując twierdzenie Hawkinga o polu, dla horyzontu pozornego do drugiego rzędu włącznie dostajemy

$$\theta_{(v)}|_{r=r_{AH}} = \frac{2S_1}{d}\,. \tag{7.12}$$

Wynika stąd, że dywergencja prądu entropii jest nieujemna. Ostatni fakt zgadza się z rezultatem hydrodynamicznym (7.2). Wyznaczenie poprawek w trzecim rzędzie wymaga geometrii w trzecim rzędzie, która jak dotąd nie została poznana. Nie mniej jednak zgodność gwarantuje formuła (7.7), tłumacząca dywergencję prądu entropii na twierdzenie o wzroście pola powierzchni, modulo modyfikacje mapy przestrzenno-brzegowej.

7.2 Przypadek naładowany

Przyjrzyjmy się teraz konstrukcji prądu entropii dla metryki dualnej do hydrodynamiki z zachowanym prądem $U(1)$. Jak pamiętamy, w tym przypadku w metryce obecne są dodatkowe człony związane z ładunkiem elektrycznym q oraz członem Cherna-Simonsa. Skutkuje to zwiększeniem liczby niezależnych struktur tensorowych, które można wypisać do drugiego rzędu włącznie w rozwinięciach gradientowych. Powtarzając rozumowanie opisane w (7.1), ogólne wyrażenie na prąd entropii jest następujący

$$S^\mu = \frac{1}{4G_N} b^{-3} \left(u^\mu + b \left(j_0 V_0^\mu + j_1 l^\mu + \sum_{k=1}^{5} j_k^\perp V_k^\mu \right) + \left(\sum_{k=1}^{6} j_k^{||} S_k \right) u^\mu \right) . \tag{7.13}$$

Jak widać, w porównaniu do (7.1) mamy tutaj również człony w pierwszym rzędzie, co jest konsekwencją istnienia wektorów poprzecznych V_0^μ i l^μ. Dodatkowo, współczynniki j_0, j_1, $j_k^\perp$ i $j_k^{||}$ są funkcjami Weyl-niezmienniczej wielkości $b^3 q$. Jak poprzednio, muszą one być wybrane w taki sposób, by zagwarantować nieujemną dywergencję prądu entropii S^μ. Odwołując się do przypadku nienaładowanego pamiętamy, że niemożliwym było określenie wszystkich współczynników w drugim rzędzie, bez narzucania pewnego dodatkowego warunku. Z drugiej strony pokazaliśmy, że po stronie grawitacyjnej dualności, niejednoznaczności w prądzie entropii w drugim rzędzie związane są ze swobodą wyboru horyzontu, w oparciu o który prąd ten liczymy. Wybierając jako horyzont horyzont pozorny, mieliśmy szansę na zapewnienie przyczynowości S^μ (horyzont zdarzeń jest ewidentnie nieprzyczynowy). W ten sposób przyczynowość wydaje się być warunkiem eliminującym niejednoznaczności w prądzie entropii do drugiego rzędu włącznie.

Szukany prąd entropii znajdziemy w oparciu o (7.7). Wykorzystując jawną postać metryki można pokazać, że

$$G = gr^6 \left(1 + S_1 \left(3L_1 - 2{F_2}^2\right) + 3L_2 S_2 + 3L_4 S_4 + 3L_5 S_5 + 3L_6 S_6\right) . \tag{7.14}$$

Jak pamiętamy, położenie horyzontu dla geometrii wolnozmiennej (zdarzeń bądź pozornego), wynosi

$$r_H = \frac{1}{b} \left(1 + \sum_{k=1}^{6} h_k S_k \right) . \tag{7.15}$$

To z jakim horyzontem mamy do czynienia, zależy od postaci stałych w drugim rzędzie h_k. W tym momencie jesteśmy już gotowi wyznaczyć prąd entropii. Wstawiając do (7.7) wyznacznik (7.14), postać wektora v daną przez (6.56), (6.57), (6.58), (6.59) i ewaluując wynik na horyzoncie (7.15), otrzymujemy prąd entropii postaci (7.13), przy czym w pierwszym rzędzie rozwinięcia gradientowego współczynniki j_0 i j_1 wynoszą

$$\begin{aligned} j_0 &= -\frac{3b^6q^2\left(b^6q^2+2\right)}{4\left(b^6q^2-2\right)\left(b^6q^2+1\right)}, \\ j_1 &= -\frac{\sqrt{3}b^9\kappa q^3}{b^6q^2+1}. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Jak widać wynik jest identyczny dla horyzontu pozornego i zdarzeń. Dotyczy to również wyrazów poprzecznych w drugim rzędzie:

$$\begin{aligned} j_1^\perp &= -W_1\left(b^3q,1\right)+\frac{1}{b^6q^2-2}, \\ j_2^\perp &= \frac{1}{2}-\frac{6b^{12}\kappa^2q^4}{\left(b^6q^2+1\right)^2}, \\ j_3^\perp &= \frac{2\sqrt{3}b^9\kappa q^3F_2\left(b^3q,1\right)}{b^6q^2+1}-W_3\left(b^3q,1\right), \\ j_4^\perp &= \frac{3b^4q^2}{\left(b^6q^2-2\right)^2}+\frac{3b^4q^2\left(b^6q^2+2\right)F_2\left(b^3q,1\right)}{2\left(b^6q^2-2\right)\left(b^6q^2+1\right)}-W_4\left(b^3q,1\right), \\ j_5^\perp &= -W_5\left(b^3q,1\right). \end{aligned} \tag{7.17}$$

Wyrazy podłużne w drugim rzędzie wynoszą

$$\begin{aligned} j_1^\parallel &= -F_2\left(b^3q,1\right)^2+\frac{3}{2}L_1\left(b^3q,1\right)+3h_1, \\ j_2^\parallel &= \frac{b^{12}\left(5-12\kappa^2\right)q^4+10b^6q^2+5}{10\left(b^6q^2+1\right)^2}+3h_2, \\ j_3^\parallel &= 3h_3, \\ j_4^\parallel &= \frac{3}{2}L_4\left(b^3q,1\right)+3h_4, \\ j_5^\parallel &= \frac{3}{2}L_5\left(b^3q,1\right)+3h_5, \\ j_6^\parallel &= \frac{3}{2}L_6\left(b^3q,1\right)+3h_6. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Ze względu na obecność w powyższych wzorach członów z h_k, wyrazy podłużne w drugim rzędzie będą różne dla horyzontu zdarzeń i horyzontu pozornego. Dla horyzontu pozornego, wstawiając do (7.18) h_k dane przez (6.62), otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
j_1^{\|} &= -F_2{}^2\left(b^3q,1\right)+\frac{3}{2}L_1\left(b^3q,1\right)+\frac{3K_1\left(b^3q,1\right)}{b^6q^2-2}+\frac{1}{\left(b^6q^2-2\right)^2},\\
j_2^{\|} &= \frac{5}{4b^6q^2-8},\\
j_3^{\|} &= \frac{1}{4b^6q^2-8},\\
j_4^{\|} &= \frac{3}{2}L_4\left(b^3q,1\right)+\frac{3K_4\left(b^3q,1\right)}{b^6q^2-2}+\frac{3b^{12}q^4\left(17b^{12}q^4+28b^6q^2+20\right)}{32\left(b^6q^2-2\right)^3\left(b^6q^2+1\right)^2},\\
j_5^{\|} &= -\frac{3b^6q^2\left(b^6q^2+2\right)}{4\left(b^6q^2-2\right)^2\left(b^6q^2+1\right)}+\frac{3}{2}L_5\left(b^3q,1\right)+\frac{3K_5\left(b^3q,1\right)}{b^6q^2-2},\\
j_6^{\|} &= \frac{3\sqrt{3}b^9\kappa q^3\left(3b^{12}q^4+14b^6q^2+8\right)}{4\left(b^6q^2-2\right)^2\left(b^6q^2+1\right)^2}+\frac{3}{2}L_6\left(b^3q,1\right)+\frac{3K_6\left(b^3q,1\right)}{b^6q^2-2}. \qquad (7.19)
\end{aligned}
$$

W przypadku horyzontu zdarzeń dostajemy wynik identyczny z (7.19), za wyjątkiem współczynników $j_1^{\|}$ i $j_4^{\|}$:

$$
\begin{aligned}
j_{1EH}^{\|}-j_{1AH}^{\|} &= \frac{1}{\left(b^6q^2-2\right)^2},\\
j_{4EH}^{\|}-j_{4AH}^{\|} &= 3\frac{b^6q^2}{2}\frac{\left(b^6q^2+2\right)^2}{\left(b^6q^2-2\right)^4}. \qquad (7.20)
\end{aligned}
$$

Można łatwo sprawdzić, że w granicy nienaładowanej otrzymane rezultaty pokrywają się z prądami entropii w przypadku nienaładowanym danymi przez (7.9), (7.10), (7.11) (zob. także [54, 50][3].

Wykorzystując znalezioną pozycję horyzontu pozornego oraz ekspansje $\theta_{(\ell)}$ i $\theta_{(n)}$ zamieszczone w Dodatku D można pokazać, że $\theta_{(v)}$ na powierzchni horyzontu pozornego wynosi

$$
\theta_{(v)}|_{r=r_{AH}}=\frac{1}{\left(2-b^6q^2\right)}\left(S_1+3\frac{b^6q^2}{2}\frac{\left(b^6q^2+2\right)^2}{\left(b^6q^2-2\right)^2}S_4\right). \qquad (7.21)
$$

Wynika stąd, że o ile wartość ładunku elektrycznego jest mniejsza od wartości ekstremalnej, tzn. $b^6q^2<2$, dywergencja prądu entropii jest nieujemna (druga zasada termodynamiki (7.6) jest spełniona). Dotyczy to również prądu związanego z horyzontem zdarzeń.

[3]Należy pamiętać, że w opublikowanej wersji [50]jest błąd w znaku w równaniu (81).

Podobnie jak miało to miejsce w przypadku nienaładowanym, wyznaczenie poprawek trzeciego rzędu w prądzie entropii wymagałoby określenia metryki i potencjału wektorowego do trzeciego rzędu, co jest zadaniem bardzo skomplikowanym technicznie. Nie mniej jednak zgodność z hydrodynamiką zapewnia postać (7.7), wiążąca dywergencję prądu entropii z twierdzeniem Hawkinga o polu, modulo ewentualne modyfikacje mapy przestrzenno-brzegowej.

Hydrodynamiczny prąd entropii w pierwszym rzędzie

Zauważmy, że wkłady drugiego rzędu do prądu entropii nie mogą być jednoznacznie określone w terminach współczynników transportu. W pierwszym rzędzie prąd ten jest jednakże wyznaczony jednoznacznie. Można łatwo sprawdzić, że otrzymany rezultat zgadza się z czysto hydrodynamiczną analizą przedstawioną w [40], w której prąd entropii w pierwszym rzędzie został wyrażony w terminach współczynników transportu. Autorzy [40] rozważali najogólniejszą postać prądu entropii dopuszczoną przez hydrodynamikę z zachowanym prądem, dopuszczając możliwość anomalii $U(1)$. W pracy tej pokazano, że prąd entropii do pierwszego rzędu włącznie rozwinięć gradientowych ma postać

$$S^\mu = su^\mu - \frac{\mu}{T}\nu^\mu + \frac{1}{2}Dl^\mu \,, \tag{7.22}$$

gdzie s oznacza gęstość entropii w stanie równowagi, a D jest współczynnikiem opisanym poniżej, natomiast ν^μ jest poprawką pierwszego rzędu do prądu $U(1)$

$$J^\mu = nu^\mu + \nu^\mu \,. \tag{7.23}$$

Z symetrii wynika, że poprawka ta może być zapisana jako

$$\nu^\mu = -\mu\sigma P^{\mu\nu}\partial_\nu\left(\frac{\mu}{T}\right) + \frac{1}{2}\xi l^\mu \,, \tag{7.24}$$

przy czym σ i ξ są współczynnikami transportu. Dla płynów dyskutowanych w niniejszej pracy, współczynniki te mogą być odczytane z (6.48). W tym celu należy wykorzystać związki

$$T = \frac{2 - b^6q^2}{2\pi b}, \quad \mu = \frac{\sqrt{3}b^2q}{\pi} \,, \tag{7.25}$$

z których otrzymujemy

$$P^{\mu\nu}\partial_\nu\left(\frac{\mu}{T}\right) = -\frac{4\sqrt{3}b^3 q\left(b^{12}q^4 + 3b^6 q^2 + 2\right)}{\left(b^6 q^2 - 2\right)^3} V_0{}^\mu \,. \tag{7.26}$$

Współczynnik ξ jest niezerowy jedynie w sytuacji, gdy teoria ma anomalie (w tym sensie, że odpowiednie pola cechowania prowadzą do anomalnego prądu $U(1)$). Jak pokazano w [40], ξ jest proporcjonalny do anomalnego współczynnika C:

$$\xi = C\left(\mu^2 - \frac{2}{3}\frac{n\mu^3}{\epsilon + p}\right) \,. \tag{7.27}$$

Pozwala to wyrazić C w terminach znanych wielkości, a następnie wyznaczyć D odwołując się do relacji z [40]

$$D = \frac{1}{3}C\frac{\mu^3}{T} \,. \tag{7.28}$$

W podobny sposób można wyrazić prąd entropii (7.22) w terminach użytych w niniejszej pracy zmiennych b i q. Wynikiem jest

$$S^\mu = \frac{1}{4G_N}\left(\frac{1}{b^3}u^\mu - \frac{3b^4 q^2\left(b^6 q^2 + 2\right)}{4\left(b^6 q^2 - 2\right)\left(b^6 q^2 + 1\right)}V_0^\mu - \frac{\sqrt{3}b^7 \kappa q^3}{\left(b^6 q^2 + 1\right)} l^\mu\right) \,. \tag{7.29}$$

Jak widać, otrzymaliśmy dokładnie postać pierwszego rzędu prądu (7.13), ze współczynnikami (7.16), które pochodzą z holograficznej formuły na prąd entropii (7.7).

Rozdział 8

Podsumowanie

Głównym tematem niniejszej pracy była grawitacyjna rekonstrukcja prądów entropii dla geometrii dualnych do hydrodynamiki silnie sprzężonej, konforemnej teorii Yanga-Millsa z zachowanym prądem oraz bez niego. Po przedstawieniu najistotniejszych elementów dualności AdS/CFT, dualności płynowo-grawitacyjnej oraz relatiwistycznej hydrodynamiki, obliczenia rozpoczęliśmy od holograficznego opisu płynów, w których jedyną wielkością zachowaną był tensor energii-pędu. Stosując metodologię rozwinięć gradientowych, przy użyciu narzędzi obliczeniowych opisanych w Dodatku A, odtworzyliśmy dualną metrykę do drugiego rzędu włącznie i sprawdziliśmy, że pokrywa się ona z postacią znalezioną w [26]. Przedyskutowaliśmy również strukturę przyczynową geometrii znajdując pozycję horyzontu zdarzeń i sprawdzając, że jest ona identyczna z otrzymaną w [26].

Jednym z najbardziej istotnych rezultatów niniejszej pracy było znalezienie położenia kowariantnego horyzontu pozornego – w tym celu wykorzystaliśmy formułę opisaną w [54]. Ważną obserwacją był fakt, iż jego pozycja była wyznaczona jednoznacznie i różniła się od pozycji horyzontu zdarzeń członami w drugim rzędzie. Wyznaczyliśmy również do drugiego rzędu włącznie holograficzny tensor energii-pędu sprawdzając, że jest on również zgodny z literaturą.

Następnie przeszliśmy do przypadku hydrodynamiki z zachowanym prądem $U(1)$. Stosując identyczne metody obliczeniowe jak w poprzednim przypadku, znaleźliśmy geometrię dualną, przy czym analogicznie jak w [26], metryka dopuszczała nietrywialną, ustaloną metrykę na brzegu. Aby obliczyć wartości oczekiwane zachowanego prądu $U(1)$, po stronie grawitacyjnej dualności AdS/CFT należy dopuścić wyrazy z ładunkiem elektrycznym. Dodatkowo, konsystentna kompaktyfikacja supergrawitacji IIB wymaga obecności członu Cherna-Simonsa. W takiej sytuacji obok metryki w rozwiązaniach równań grawitacyjnych pojawi się pole wektorowe sprzężone do tensora metrycznego.

Do drugiego rzędu rozwinięć gradientowych przedyskutowaliśmy strukturę przyczynową geometrii znajdując horyzont zdarzeń oraz horyzont pozorny. Okazało się, że podobnie jak miało to miejsce w przypadku nienaładowanym, kowariantny horyzont pozorny zadany jest jednoznacznie i pokrywa się z horyzontem zdarzeń do pierwszego rzędu włącznie. Sprawdziliśmy również, że oba horyzonty redukują się do odpowiednich postaci w granicy nienaładowanej. Wykorzystując dualność płynowo-grawitacyjną obliczyliśmy również zachowany tensor energii-pędu i prąd $U(1)$, tym samym znajdując odpowiednie współczynniki transportu. Rachunek ten wymagał kasowania się rozbieżności w ramach procedury holograficznej renormalizacji. Fakt, że kasowanie to zachodzi jest bardzo nietrywialnym sprawdzianem poprawności przeprowadzonych rachunków.

W dalszej części pracy, odwołując się do rozwiązań znalezionych w poprzednich rozdziałach, zajęliśmy się problemem holograficznej rekonstrukcji hydrodynamicznego prądu entropii. Prąd ten został znaleziony przy wykorzystaniu formuły opisanej w [54], odpowiednio dla geometrii dualnej do hydrodynamiki bez i z zachowanym prądem. W obu przypadkach wyznaczane były prądy związane zarówno z horyzontem zdarzeń, jak też i z horyzontem pozornym. Ważnym rezultatem był fakt, iż prądy dla horyzontu zdarzeń i horyzontu pozornego pokrywały się do pierwszego rzędu włącznie, różniąc się w drugim rzędzie. Dodatkowo sprawdzono, ze dywergencja wszystkich wspomnianych prądów była nieujemna.

Jednym z najistotniejszych wniosków wynikających z otrzymanych rezultatów było powiązanie niejednoznaczności prądu entropii w drugim rzędzie ze swobodą wyboru horyzontu, w oparciu o który prąd ten liczymy, przy czym wymóg przyczynowości zdawał się faworyzować definicję prądu entropii opartą o horyzont pozorny. Fakt ten sprawdzono na przykładzie obu rozważanych geometrii.

Podsumowując, niniejsza praca wniosła następujące, nowe elementy:

1. Znaleziono wygodną procedurę wyznaczania pozycji kowariantnego horyzontu po-

zornego dla przypadku wolnozmiennych geometrii.

2. Znaleziono geometrię dualną do hydrodynamiki z zachowanym prądem. W porównaniu do wcześniejszych prac [31, 30] ostateczna postać metryki jest ogólniejsza, z uwagi na to że dopuszczała dowolną, ale ustaloną metrykę na konforemnym brzegu. Jednocześnie zastosowanie wygodniejszego cechowania oraz prostszej parametryzacji metryki w zerowym rzędzie pozwoliło przedstawić zarówno metrykę, jak też i potencjał wektorowy w znacznie prostszej i dużo bardziej przejrzystej postaci. Sprawdzono również, że otrzymane rozwiązania redukują się do odpowiednich wyników z [26] w granicy nienaładowanej.

3. Znaleziono horyzont zdarzeń dla przypadku geometrii dualnej do hydrodynamiki z zachowanym prądem $U(1)$ pokazując, że zgodnie z oczekiwaniami opartymi na hipotezie kosmicznego cenzora osobliwość znajduje się pod horyzontem.

4. Znaleziono pozycje horyzontów pozornych dla obu typów dyskutowanych geometrii pokazując, że horyzont pozorny wyznaczony jest jednoznacznie i znajduje się wewnątrz bądź pokrywa się z horyzontem zdarzeń.

5. Znaleziono wygodną formułę na prąd entropii związany z hiperpowierzchnią horyzontu [54],

6. W oparciu o formułę z [54] wyznaczono prądy entropii dla horyzontu zdarzeń i pozornego w przypadku geometrii z i bez zachowanych ładunków.

7. Sprawdzono, że znaleziony prąd entropii pokrywa się z prądem otrzymanym do pierwszego rzędu włącznie w oparciu o czysto hydrodynamiczne podejście [40].

8. Powiązano dowolności w hydrodynamicznej definicji prądu entropii z dowolnością wyboru hiperpowierzchni, w oparciu o którą prąd ten liczymy w oparciu o formalizm dualności płynowo-grawitacyjnej.

9. Zasugerowano, że brakującym czynnikiem eliminującym dowolności w prądzie entropii może być przyczynowość ewolucji entropii.

Dodatek A

Pakiet obliczeń tensorowych

Poniżej przedstawimy krótki opis pakietu do obliczeń tensorowych w programie `Mathematica`. Pakiet ten składa się z zestawu komend które konstruują bardziej skomplikowane tensory z tensorów prostszych oraz wykonują operacje na wskaźnikach. Nadrzędną zasadą przyświecającą strategii wykonywania obliczeń jest niedefiniowanie tensorów w postaci macierzy, a przechowywanie informacji o ich składowych w pamięci w postaci list podstawień. W ten sposób każdy tensor reprezentowany jest jako wyrażenie wskaźnikowe dopóki jego jawna postać, o ile została wcześniej zdefiniowana, nie będzie wywołana za pomocą stosownej funkcji (opisanej poniżej).

Generalnie wszystkie funkcje pakietu można podzielić na dwie grupy: część analityczną i część algebraiczną. Część analityczna umożliwia operowanie na jawnych postaciach tensorów: dokonywanie rozwinięć gradientowych, wywoływanie określonych składowych czy dokonywanie na nich działań. Część algebraiczna, zainspirowana świetnym programem do obliczeń symbolicznych `Cadabra` [57, 58], pozwala na dokonywanie operacji na wskaźnikach, bez odwoływania się do jawnej postaci tensorów. Dzięki temu możliwe jest upraszczanie wyrażeń przy użyciu zadanych tożsamości, uwzględnianie własności symetrii, dokonywanie zwężeń itp.

W praktyce funkcjonalność części algebraicznej i analitycznej można łączyć. Przykładowo, mając do czynienia ze skomplikowanym wyrażeniem tensorowym często wygodnie jest najpierw uprościć je maksymalnie porządkując wskaźniki, bądź wczytując znane tożsamości, a dopiero potem wykonać działania na jawnych postaciach składowych.

Deklaracje wstępne

Obliczenia rozpoczynamy od następujacych ustawień

- *allowparallel* – zmienna globalna sterująca obliczeniami wielordzeniowymi w bardziej złożonych funkcjach pakietu; przypisanie jej wartości 1 uruchamia obliczenia wielordzeniowe, 0 wyłącza je,
- *dwymiar* – zmienna globalna przechowująca informację o wymiarowości d-wymiarowej czasoprzestrzeni, reprezentującej konforemny brzeg $d+1$-wymiarowej czasoprzestrzeni. Przykładowo, dla przypadku czasoprzestrzeni pięciowymiarowej *dwymiar* $=$ 4,
- *epsord* – zmienna globalna ustalająca rząd rozwinięć gradientowych,
- *derivlist* – zmienna globalna przechowująca listę symboli pochodnych,
- *constantsList* – lista symboli traktowanych jako stałe w różniczkowaniu za pomocą funkcji *prodrule* (zdefiniowanej poniżej),
- *KroneckerdeltaSymbol* – zmienna wczytuje symbol delty Kroneckera, przykładowo *KroneckerdeltaSymbol* $= \delta$,
- *BoundarymetricSymbol* – zmienna deklaruje symbol metryki tła dla teorii pola na konforemnym brzegu $d+1$-wymiarowej przestrzeni. Przykładowo *Boundarymetric-Symbol* $= h$ stosujemy dla metryki $h_{\mu\nu}$,
- *metricSymbol* – zmienna deklaruje symbol metryki przestrzeni $d+1$-wymiarowej: przykładowo *metricSymbol* $= g$ stosujemy dla metryki g_{AB},

Wskaźniki

Indeksy tensorowe wprowadzane są przy użyciu następującej składni: *tensor*[*indeks1*,*indeks2*,...], gdzie *indeks1*, *indeks2*,... reprezentują ko- lub kontrawariantne indeksy tensora *tensor*. Indeksy kowariantne wprowadzamy przy użyciu składni _@, podczas gdy kontrawariantne poprzez ^{TM}@. Same wskaźniki umieszczamy wewnątrz nawiasów [.]. Przykładowo

$\sigma[\_@\mu, {}^{TM}@\nu] = \sigma_{\mu}{}^{\nu}$. Ponieważ w pełnej $d+1$-wymiarowej przestrzeni wyodrębniamy d-wymiarową podprzestrzeń, konieczne staje się rozróżnienie wskaźników. Indeksom d-wymiarowym odpowiadają litery greckie, podczas gdy $d+1$-wymiarowym łacińskie (wielkość liter nie ma znaczenia). Pakiet dopuszcza również bardziej złożone nazwy indeksów przyjmując zasadę, że pierwsza litera (grecka lub łacińska) określa typ przestrzeni.

Część analityczna

- *Ord* - rozwija wyrażenie w szereg Maclaurina traktując ϵ jako mały parametr do zadanego przez *dwymiar* rzędu,

- *coeff* - pomija w wyrażeniu potęgi ϵ wyższe od zadanych przez *dwymiar*,

- *ii* - zwraca wartość składowych tensora w oparciu o wcześniej zdefiniowane podstawienie. Np. $ii@u[\_@1]$ wywołuje zerową składową wektora u_μ,

- *create* - podstawowa funkcja konstruująca bardziej złożone tensory z tensorów prostszych i zapisująca wynik w pamięci w postaci podstawienia. Funkcja *create* automatycznie realizuje konwencję sumacyjną Einsteina rozwijając wyrażenie w rozwinięcie gradientowe do zadanego przez *epsord* rzędu. Odmiana *create0* pomija rozwijanie w szeregi potęgowe, natomiast *create2* aplikuje uproszczoną jego wersję, w której pomijane są jedynie odpowiednio wysokie potęgi ϵ,

- *ncreate* - funkcja zwraca jawną postać macierzy tensora, o ile ta została wcześniej zdefiniowana bądź zbudowana za pomocą *create*, ogólniejsza od *ii*. W przypadku natrafienia na złożone wyrażenie, *ncreate* realizuje automatycznie konwencje sumacyjne, zwracając odpowiedniego rządu macierz, listę lub skalar. Podobnie jak *create* ma dwie odmiany: *ncreate*0 pomija rozwijanie w szeregi potęgowe, a *ncreate*2 realizuje uproszczoną jego wersję (analogicznie jak *create*2),

- *tensorform* - przepisuje wyrażenie w łatwej do odczytania postaci wskaźnikowej. Z tego też względu funkcja ta jest szczególnie użyteczna również w części algebraicznej pakietu,

- *collectsimplify* - upraszcza wyrażenie w postaci rozwinięcia gradientowego wykrywając, grupując i upraszczając odpowiednie jego elementy.

Część algebraiczna

W pakiecie zaimplementowano część funkcji o nazwach i funkcjonalności analogicznej do tych z programu `Cadabra`:

- *canonicalise*,
- *distribute*,
- *factorout*,
- *prodrule*,
- *renamedummies*,
- *eliminatekr* - eliminuje d-wymiarowe delty Kroneckera, np. $\delta_{\mu}{}^{\nu}$,
- *Eliminatekr* - eliminuje $d+1$-wymiarowe delty Kroneckera, np. $\delta_{A}{}^{B}$,
- *eliminatemetric* - eliminuje d-wymiarową metrykę $g_{\mu\nu}$,
- *Eliminatemetric* - eliminuje $d+1$-wymiarową metrykę g_{AB},
- *substitute*

Dodatkowo zdefiniowano dla wygody

- *split* - wyodrębnia w $d+1$-wymiarowych sumach (zwężeniach) ich d-wymiarowe części,
- *symmetricmake(wyrażenie, lista)* - symetryzuje *wyrażenie* we wskaźnikach danych przez *lista*,
- *epsilonincorporate* - domnaża każdy wyraz z d-wymiarową pochodną przez ϵ,
- *checksublist* - przeszukuje listę podstawień i zwraca liczbę znalezionych błędów,

- *upall* - podnosi wszystkie wskaźniki wolne wyrażenia,
- *downall* - opuszcza wszystkie wskaźniki wolne wyrażenia,

Wszystkie funkcje, również te z części analitycznej, wykrywają i sygnalizują błędy w wyrażeniach tensorowych.

Dodatkowo każda funkcja części algebraicznej ma swój odpowiednik z „Q" w nazwie na końcu, np. *substituteQ*. Funkcje te działają wewnątrz bloku obliczeniowego rozpoczynającego się komendą *startQ*, która wczytuje wyrażenie do zmiennej globalnej *rs* i kończącego się komendą *endQ*. Wewnątrz bloku operacje na wyrażeniu dokonywane są z użyciem zmiennej globalnej, co eliminuje konieczność ciągłego wczytywania poprzednich rezultatów. Poszczególne wyniki przedstawiane są również w czytelnej, wskaźnikowej postaci danej przez *tensorform.* Rachunek z użyciem *startQ...endQ* jest więc prostszy i bardziej przejrzysty, szczególnie w przypadku dokonywania bardziej złożonych operacji.

Dodatek B

Rozwiązania w drugim rzędzie

W poniższych wyrażeniach prim oznacza pochodne względem br

B.1 Sektor skalarny

$$
\begin{aligned}
N_1 &= q\int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \left(\frac{b^2x}{2\sqrt{3}r} - \frac{\sqrt{3}x^3}{2r^3} + \frac{x^4}{\sqrt{3}br^4}\right)\frac{(1+x+x^2)^2}{(1+x)^2(-b^6q^2+x^2+x^4)^2},\\
N_2 &= -\frac{3\sqrt{3}b^6\kappa^2q^5}{5r^9\left(b^6q^2+1\right)^2} - \frac{\sqrt{3}q}{4b^2r^5} - \frac{\sqrt{3}b^2\kappa^2q^3}{r^7\left(b^6q^2+1\right)},\\
N_3 &= 0,\\
N_4 &= \int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \Big(\frac{\sqrt{3}b^5F_0q^3x^2\left(b^6q^2(2x-3)+4x-3\right)(x-br)^2(br+2x)}{r^4(x-1)^2(x+1)^2\left(b^6q^2+1\right)\left(-q^2b^6+x^4+x^2\right)^2} + \\
&+ \frac{2\sqrt{3}{F_0}^2qx^3\left(b^6q^2\left(x^2-2\right)+x^2\right)(x-br)^2(br+2x)}{br^4(x-1)^2(x+1)^2\left(-q^2b^6+x^4+x^2\right)^2} + \\
&- \frac{b^5q^3x(x-br)^2(br+2x)}{8\sqrt{3}r^4(x-1)^2(x+1)^3\left(b^6q^2+1\right)^2\left(-q^2b^6+x^4+x^2\right)^3}\Big(\\
&+ 2(x-1)^2x^2\left(2x^4+18x^3+21x^2+18x+7\right) + b^{18}q^6\left(-4x^4+2x^3+9x^2+x-14\right) + \\
&+ b^{12}q^4\left(4x^8+10x^7-17x^6-3x^5-15x^4+15x^3+35x^2+17x-28\right) + \\
&+ b^6q^2\left(8x^8+32x^7-49x^6-21x^5-33x^4+15x^3+34x^2+16x-14\right)\Big)\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N_5 &= \int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{qx\left(b^6q^2(2x+1) - x^2\left(x^2+2x+3\right)\right)(x-br)^2(br+2x)}{4\sqrt{3}br^4(x+1)^2\left(-q^2b^6+x^4+x^2\right)^2}, \\
N_6 &= \int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \Big(- \frac{24b^8F_0\kappa q^4(x-br)^2(br+2x)}{r^4(x-1)x^3(x+1)\left(b^6q^2+1\right)\left(-q^2b^6+x^4+x^2\right)} + \\
&- \frac{b^2\kappa q^2(x-br)^2(br+2x)}{2r^4(x-1)x^4(x+1)^3\left(b^6q^2+1\right)^2\left(-q^2b^6+x^4+x^2\right)^3}\Big(b^{24}q^8\left(x^5+2x^4+3x^2+24x+18\right) + \\
&+ b^6q^2x^4\left(-9x^9-2x^8-19x^7-9x^6+11x^5+7x^4+9x^3+3x^2+4x+5\right) \\
&- 2x^7\left(3x^6+2x^5+x^4-3x^2-2x-1\right) \\
&+ b^{18}q^6\left(2x^9-4x^8-7x^7-18x^6-48x^5-45x^4-54x^3-48x^2+12x+18\right) + \\
&+ b^{12}q^4x^2\Big(- 3x^{11}+2x^{10}-5x^9+15x^8+43x^7+47x^6+60x^5+57x^4+15x^3 + \\
&+ 6x^2-18x-27\Big)\Big)\Big),
\end{aligned} \tag{B.1}
$$

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \frac{2}{3}{F_2}^2 - \frac{2}{3}\int_{br}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\int_x^{\infty}\mathrm{d}y\, y^2({F_2}')^2, \\
L_2 &= \frac{1}{3b^2r^2} - \frac{4b^6\kappa^2q^4}{5r^6\left(b^6q^2+1\right)^2}, \\
L_3 &= 0, \\
L_4 &= \int_{br}^{\infty}\mathrm{d}x\Big(- \frac{4b^3qx^4\left(b^6q^2+1\right)}{3(x-1)(x+1)\left(b^6q^2-2\right)\left(b^6q^2-x^2\left(x^2+1\right)\right)}\frac{\partial F_0}{\partial(b^3q)} + \\
&+ \frac{4{F_0}^2x^5\left(b^6q^2\left(2x^2-3\right)+2x^2\right)}{3(x^2-1)^2\left(-b^6q^2+x^4+x^2\right)^2} + \frac{F_0x^4}{3(x^2-1)^2(-b^6q^2+x^2+x^4)}\Big(2x^2(x^4-1) + \\
&+ b^{18}q^6(7x^2+6x-15) + b^{12}q^4(x^6+12x^2-5) + b^6q^2(3x^6+3x^2-24x+10)\Big) + \\
&+ \frac{b^6q^2x^3}{12(x^2-1)^2\left(b^6q^2-2\right)\left(b^6q^2+1\right)^2\left(b^6q^2-x^2\left(x^2+1\right)\right)^2}(b^{18}q^6\left(2x^3-3x^2+16x-16\right) + \\
&- 2b^{12}q^4\left(x^7+3x^2-22x+16\right) + 2b^6q^2\left(x^7-3x^3+6x^2+2x-8\right) + 4x\left(x^6-x^2+6x-6\right)) \\
&- \frac{2x^4{N_4}''}{3\sqrt{3}b^3q} - \frac{10x^3{N_4}'}{3\sqrt{3}b^3q} - \frac{2x^2N_4}{\sqrt{3}b^3q}\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_5 &= -\int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \Big(\frac{2x^4 F_0}{3\left(x^2-1\right)\left(-q^2 b^6+x^4+x^2\right)} + \frac{x^3\left(b^6 q^2(x-2)+2(x-1)\right)}{6\left(x^2-1\right)\left(b^6 q^2+1\right)\left(b^6 q^2-x^2\left(x^2+1\right)\right)} + \\
&+ \frac{2x^4 {N_5}''}{3\sqrt{3}b^3 q} + \frac{10x^3 {N_5}'}{3\sqrt{3}b^3 q} + \frac{2x^2 N_5}{\sqrt{3}b^3 q}\Big), \\
L_6 &= \int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \Big(\frac{8\sqrt{3}b^9 F_0 \kappa q^3}{(x-1)x(x+1)\left(b^6 q^2+1\right)\left(b^6 q^2-x^2\left(x^2+1\right)\right)} - \frac{2x^4 {N_6}''}{3\sqrt{3}b^3 q} - \frac{10x^3 {N_6}'}{3\sqrt{3}b^3 q} - \frac{2x^2 N_6}{\sqrt{3}b^3 q} + \\
&- \frac{b^3 \kappa q}{\sqrt{3}(x-1)x^2(x+1)^2\left(b^6 q^2+1\right)^2\left(b^6 q^2-x^2\left(x^2+1\right)\right)^2} \Big(\\
&+ 4x^5\left(x^6+x^5+x^4-x^2-x-1\right) + b^{18} q^6\left(2x^4+2x^3+4x^2-7x-13\right) + \\
&- b^{12} q^4\left(2x^8+6x^7+12x^6-7x^5-15x^4-15x^3-21x^2+x+13\right) + \\
&+ b^6 q^2 x^2\left(4x^9+4x^8+4x^7-2x^6-10x^5-22x^4-3x^3+7x^2+7x+11\right)\Big)\Big) \\
K_1 &= -\frac{1}{2b^2 r^2} + \frac{1}{b^4 r^4}\int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \Big(-x + \frac{x(1+x+2x^2-b^6 q^2(1+x))}{6(1+x)(-b^6 q^2+x^2+x^4)} + \\
&- \frac{2b^6 q^2}{x^3}\int_x^{\infty} \mathrm{d}y\, y({F_2}')^2 - \frac{x^2-3x^6+b^6 q^2(x^2-6)}{3x^4}\int_x^{\infty} \mathrm{d}y\, y^2({F_2}')^2\Big), \\
K_2 &= \frac{1}{2b^2 r^2} - \frac{6b^6 \kappa^2 q^6}{5r^{12}\left(b^6 q^2+1\right)^2} - \frac{5q^2}{12b^2 r^8} - \frac{7b^2 \kappa^2 q^4}{5r^{10}\left(b^6 q^2+1\right)} + \\
&+ \frac{5b^{18} q^6 + 3b^{12}\left(4\kappa^2+5\right)q^4 + 15b^6 q^2 + 5}{20b^6 r^6\left(b^6 q^2+1\right)^2}, \\
K_3 &= \frac{1}{12b^2 r^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_4 &= -\frac{b^5q^2}{3r\left(4b^6q^2+4\right)}+\frac{1}{b^4r^4}\int_{br}^{\infty}\mathrm{d}x\Big(\frac{-b^6q^2x}{48\left(x^2-1\right)^2\left(b^6q^2+1\right)^2\left(b^6q^2-x^2\left(x^2+1\right)\right)^2}\Big(\\
&+\ b^{18}q^6\left(8x^5+3x^4-20x^3-2x^2+12\right)+\\
&-\ 4x^2\left(2x^7+15x^6-18x^5+x^4-2x^3-3x^2+6x-1\right)+\\
&+\ b^{12}q^4\left(-8x^9-15x^8+36x^7-4x^6+24x^5+15x^4-64x^3-12x^2+24\right)+\\
&-\ 4b^6q^2\left(4x^9+15x^8-27x^7+2x^6-6x^5-6x^4+17x^3+3x^2-3\right)\Big)+\\
&+\ \frac{x^4F_0}{6\left(x^2-1\right)^2\left(b^6q^2+1\right)\left(-q^2b^6+x^4+x^2\right)^2}\Big(b^{18}q^6\left(3x^2+3x-7\right)+\\
&+\ b^{12}q^4\left(-12x^6-9x^5+21x^4+9x^2+9x-14\right)+3\left(3x^{10}-4x^6+x^2\right)+\\
&+\ b^6q^2\left(9x^{10}-24x^6-18x^5+21x^4+9x^2+6x-7\right)\Big)+\\
&+\ \frac{{F_0}^2x^5\left(b^{12}q^4\left(2x^2-3\right)+b^6q^2\left(-12x^6+15x^4+4x^2-3\right)+2\left(3x^{10}-6x^6+x^2\right)\right)}{3\left(x^2-1\right)^2\left(-q^2b^6+x^4+x^2\right)^2}+\\
&-\ \frac{x^4\left(b^6q^2-3x^4+1\right){N_4}''}{3\sqrt{3}b^3q}-\frac{x\left(b^6q^2\left(5x^2+6\right)-15x^6+5x^2\right){N_4}'}{3\sqrt{3}b^3q}\\
&-\ \frac{N_4\left(b^6q^2\left(x^2+2\right)-3x^6+x^2\right)}{\sqrt{3}b^3q}\Big),\\
K_5 &= \frac{b^6q^2+2}{3br\left(4b^6q^2+4\right)}+\frac{1}{b^4r^4}\int_{br}^{\infty}\mathrm{d}x\,\Big(\frac{x\left(x^2\left(3x^3+3x^2+3x+1\right)-b^6q^2\left(x^2+2x+2\right)\right)}{6(x+1)\left(-q^2b^6+x^4+x^2\right)}+\\
&-\ \frac{x^4\left(b^6q^2-3x^4+1\right){N_5}''}{3\sqrt{3}b^3q}-\frac{x\left(b^6q^2\left(5x^2+6\right)-15x^6+5x^2\right){N_5}'}{3\sqrt{3}b^3q}+\\
&-\ \frac{N_5\left(b^6q^2\left(x^2+2\right)-3x^6+x^2\right)}{\sqrt{3}b^3q}\Big),\\
K_6 &= -\frac{2b^2\kappa q}{\sqrt{3}r\left(b^6q^2+1\right)}+\frac{1}{b^4r^4}\int_{br}^{\infty}\mathrm{d}x\,\Big(\frac{-b^3\kappa q}{2\sqrt{3}(x-1)x^2(x+1)^2\left(b^6q^2+1\right)^2\left(b^6q^2-x^2\left(x^2+1\right)\right)^2}\,\cdot\\
&\cdot\ \Big(b^{24}q^8\left(2x^4+2x^3+x^2-4x-7\right)+4x^5\left(3x^7+x^6+x^5+x^4-3x^3-x^2-x-1\right)+\\
&+\ b^{18}q^6\left(-8x^8-6x^6+10x^5+35x^4+14x^3+10x^2-5x-14\right)+\\
&+\ b^6q^2x^2\left(18x^{10}+2x^9+32x^8+5x^7-35x^6-11x^5-23x^4-7x^3+7x^2+7x+5\right)+\\
&+\ b^{12}q^4\Big(6x^{12}-2x^{11}+13x^{10}-14x^9-46x^8-22x^7+\\
&-\ 40x^6-8x^5+40x^4+19x^3+14x^2-x-7\Big)\Big)\\
&+\ \frac{2\sqrt{3}b^9\kappa q^3F_0\left(b^6q^2-5x^4+1\right)}{x\left(x^2-1\right)\left(b^6q^2+1\right)\left(b^6q^2-x^2\left(x^2+1\right)\right)}-\frac{N_6\left(b^6q^2\left(x^2+2\right)-3x^6+x^2\right)}{\sqrt{3}b^3q}+\\
&-\ \frac{x^4\left(b^6q^2-3x^4+1\right){N_6}''}{3\sqrt{3}b^3q}-\frac{x\left(b^6q^2\left(5x^2+6\right)-15x^6+5x^2\right){N_6}'}{3\sqrt{3}b^3q}\Big)
\end{aligned}
$$

B.2 Sektor wektorowy

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= -\sqrt{3}b^3 q \int_{br}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} \int_x^{\infty} \mathrm{d}y \frac{y^6(2+y)}{(1+y)^2(-b^6q^2+y^2+y^4)^2} + \frac{3\sqrt{3}bq}{8\left(b^6q^2+1\right)r^2}, \\
Y_2 &= \frac{3\sqrt{3}b^7\kappa^2q^3}{\left(b^6q^2+1\right)^2 r^2}, \\
Y_3 &= \frac{3b^6\kappa q^2}{b^6q^2+1} \int_{br}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} \int_x^{\infty} \mathrm{d}y \frac{y^3\left(b^6q^2(y+2)+3y^5+6y^4+9y^3+6y^2+4y+2\right)}{(y+1)^2\left(-q^2b^6+y^4+y^2\right)^2} + \\
&- \frac{3b^4\kappa q^2}{2r^2\left(b^6q^2+1\right)^2}, \\
Y_4 &= -\int_{br}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} \int_x^{\infty} \mathrm{d}y \frac{y^7}{(1-y^2)^2(-b^6q^2+y^2+y^4)} \int_1^y \mathrm{d}z \frac{2\sqrt{3}b^3q(z-1)}{z^2\left(b^6q^2-2\right)\left(b^6q^2-z^2\left(z^2+1\right)\right)} \Big(\\
&\quad 3b^{12}q^4\left(z^2+z+1\right) - b^6q^2z^2\left(z^4+z^3+2z^2-z+3\right) + 2z^3\left(z^3+z^2+2z+2\right)\Big) + \\
&+ \frac{2a_4\left(b^6q^2+1\right)+\sqrt{3}b^9q^3}{16b^2r^2\left(b^6q^2+1\right)^2}, \\
Y_5 &= \frac{\sqrt{3}b^3q}{b^6q^2+1} \int_{br}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} \int_x^{\infty} \mathrm{d}y \frac{y^7}{(1-y^2)^2(-b^6q^2+y^2+y^4)} \int_1^y \frac{\mathrm{d}z}{z^5} \Big(\\
&\quad b^{12}q^4\left(-2z^2+9z-10\right) + 2z^2\left(z^4-1\right) + 2b^6q^2\left(z^6-2z^2+9z-5\right) + \\
&+ 3zF_0\left(b^{12}q^4\left(5z^2-9\right) + b^6q^2\left(3z^6+10z^2-9\right) + z^2\left(3z^4+5\right)\right)\Big) + \\
&+ \frac{\sqrt{3}a_5\left(b^6q^2+1\right) + 3b^9\left(24\kappa^2-1\right)q^3 - 3b^3q}{8\sqrt{3}b^2r^2\left(b^6q^2+1\right)^2}
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
a_4 &:= \int_1^{\infty} \mathrm{d}x \frac{2\sqrt{3}b^3q\left(b^{12}q^4\left(3-2x^3\right)+b^6q^2x^2\left(-3x^2+2x-3\right)+4x^3\right)}{x^2\left(b^6q^2-2\right)\left(b^6q^2-x^2\left(x^2+1\right)\right)}, \\
a_5 &:= -\frac{\sqrt{3}b^3q\left(b^{12}q^4-3b^6q^2+2\right)}{2b^6q^2+2} + \int_1^{\infty} \mathrm{d}x \, \frac{3\sqrt{3}b^3qF_0\left(b^6q^2\left(5x^2-9\right)+x^2\left(3x^4+5\right)\right)}{x^4},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_1 &= -br\int_{br}^{\infty}\mathrm{d}x\Big(\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)\left(-q^2b^6+x^2+x^4\right)}+\\
&- \frac{2\left(b^6q^2\left(2x^2-3\right)+2x^2\right)}{x^7}\int_x^{\infty}\mathrm{d}y\frac{y^6(2+y)}{(1+y)^2(-b^6q^2+y^2+y^4)^2}\Big)+\\
&- \frac{3\left(b^6q^2r^2-b^4q^2+r^2\right)}{4b^3r^5\left(b^6q^2+1\right)},\\
W_2 &= -\frac{1}{2br}+\frac{6b^7\kappa^2q^4}{r^5\left(b^6q^2+1\right)^2},\\
W_3 &= br\int_{br}^{\infty}\mathrm{d}x\Big(-\frac{\left(b^6q^2r^2-b^4\left(q^2+r^6\right)+r^2\right)Y_3''}{\sqrt{3}b^4qr^3}+\frac{\left(b^6q^2r^2-3b^4\left(q^2-r^6\right)+r^2\right)Y_3'}{\sqrt{3}b^5qr^4}+\\
&- \frac{\sqrt{3}\kappa q\left(b\left(br^2\left(3b^6q^2+2\right)+r\left(3b^6q^2+2\right)+2b^5q^2-3b^5r^6-3b^4r^5-3b^3r^4-b^2r^3\right)+2\right)}{b^2r^3\left(b^6q^2+1\right)\left(br+1\right)\left(b^4q^2-b^2r^4-r^2\right)}+\\
&+ \frac{8\sqrt{3}F_2\kappa q}{b^2r^5}\Big),\\
W_4 &= br\int_{br}^{\infty}\mathrm{d}x\Big(\frac{\left(b^6q^2r^2-3b^4\left(q^2-r^6\right)+r^2\right)Y_4'}{\sqrt{3}b^5qr^4}-\frac{(br-1)(br+1)\left(b^4q^2-b^2r^4-r^2\right)Y_4''}{\sqrt{3}b^4qr^3}+\\
&- \frac{2b^2r^4F_0}{b^6q^2r^2-b^4\left(q^2+r^6\right)+r^2}-\frac{2r^3\left(b^8q^2+b^2\right)-r\left(b^6q^2+2\right)}{2b\left(b^6q^2+1\right)\left(br-1\right)(br+1)\left(b^4q^2-b^2r^4-r^2\right)}\Big),\\
W_5 &= br\int_{br}^{\infty}\mathrm{d}x\Big(-\frac{\left(b^2r^2-1\right)\left(b^4q^2-b^2r^4-r^2\right)Y_5''}{\sqrt{3}b^4qr^3}+\frac{\left(b^6q^2r^2-3b^4\left(q^2-r^6\right)+r^2\right)Y_5'}{\sqrt{3}b^5qr^4}+\\
&+ \frac{1}{2b^3r^5\left(b^6q^2+1\right)\left(b^2r^2-1\right)\left(b^4q^2-b^2r^4-r^2\right)}\Big(48b^4\kappa^2q^2\left(b^6q^2r^2-b^4\left(q^2+r^6\right)+r^2\right)+\\
&+ r^2\left(-2\left(b^6q^2r+r\right)^2-3b^5q^2r\left(b^6q^2+2\right)+2b^4r^6\left(b^6q^2+1\right)+6b^4q^2\left(b^6q^2+1\right)\right)\Big)+\\
&- \frac{F_0\left(5b^6q^2r^2-b^4\left(7q^2+r^6\right)+5r^2\right)}{b^8q^2r^4-b^6r^2\left(q^2+r^6\right)+b^2r^4}\Big)
\end{aligned}
$$

B.3 Sektor tensorowy

$$
\begin{aligned}
H_1 &= -(br)^2 \int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x}{-b^6q^2+x^2+x^4} \left(1+\frac{1}{1-x^2}\int_1^x \mathrm{d}y\,\left(6y^2F_2+4y^3F_2{}'\right)\right),\\
H_2 &= -2(br)^2 \int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x}{-b^6q^2+x^2+x^4},\\
H_3 &= (br)^2 \int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x}{-b^6q^2+x^2+x^4} \left(1-\frac{1}{1-x^2}\int_1^x \mathrm{d}y\,\left(6y^2F_2+4y^3F_2{}'\right)\right),\\
H_4 &= 2(br)^2F_2{}^2 - 2(br)^2 \int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x}{-b^6q^2+x^2+x^4},\\
H_5 &= \frac{2(br)^2}{(1+b^6q^2)^2} \int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{1}{x^7(-b^6q^2+x^2+x^4)}\Big(-(1+b^6q^2)^2x^4\left(x^2+x^4+b^6q^2(1+2x^2)\right)+\\
&+ 12b^{12}\kappa^2q^4\left(b^6q^2\left(2\left(x^6+x^4+x^2\right)+3\right)+x^2(x^2-1)\left(2x^2+1\right)\right)\Big),\\
H_6 &= \frac{2\sqrt{3}b^{11}\kappa q^3r^2}{1+b^6q^2} \int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x^2+x+1}{x^2(x+1)\left(-b^6q^2+x^2+x^4\right)},\\
H_7 &= 0,\\
H_8 &= -(br)^2 \int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x}{(1-x^2)(-b^6q^2+x^2+x^4)} \int_1^x \mathrm{d}y\, p_8(y),\\
H_9 &= -(br)^2 \int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x}{(1-x^2)(-b^6q^2+x^2+x^4)} \int_1^x \mathrm{d}y\, p_9(y),\\
H_{10} &= -(br)^2 \int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x}{(1-x^2)(-b^6q^2+x^2+x^4)} \int_1^x \mathrm{d}y\, p_{10}(y),\\
H_{11} &= 0,
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
p_8(x) \quad &:= \quad -\frac{4b^3qx^2\left(b^6q^2+1\right)\left(b^6q^2\left(x^2-3\right)+3x^6+x^2\right)}{\left(x^2-1\right)\left(b^6q^2-2\right)\left(b^6q^2-x^2\left(x^2+1\right)\right)}\frac{\partial F_0}{\partial(b^3q)}+\\
&+ \quad \frac{4{F_0}^2x^3\left(b^{12}q^4\left(4x^4-15x^2+12\right)+b^6q^2x^2\left(3x^4+8x^2-15\right)+4x^4\right)}{\left(x^2-1\right)^2\left(-q^2b^6+x^4+x^2\right)^2}+\\
&+ \quad \frac{2F_0x^2}{\left(x^2-1\right)^2\left(b^6q^2-2\right)\left(b^6q^2+1\right)\left(-q^2b^6+x^4+x^2\right)^2}\Big(4x^8+2x^4+\\
&+ \quad b^{24}q^8\left(2x^4+9x^3-22x^2-12x+24\right)+4b^6q^2x^2\left(4x^6+3x^5-6x^4+2x^2-9x+4\right)\\
&- \quad 6x^{12}+b^{18}q^6\left(8x^8-3x^7-6x^6+8x^4+9x^3-28x^2+6\right)+\\
&+ \quad 2b^{12}q^4\left(3x^{12}+10x^8-15x^6+6x^4-18x^3+5x^2+24x-9\right)\Big)\\
&- \quad \frac{b^6q^2x}{4\left(x^2-1\right)^2\left(b^6q^2-2\right)\left(b^6q^2+1\right)^2\left(b^6q^2-x^2\left(x^2+1\right)\right)^2}\Big(\\
&\quad\quad b^{24}q^8\left(3x^4-12x^3+8x^2+36x-36\right)+8x^2\left(3x^6-6x^5+x^4-3x^2+6x-1\right)+\\
&+ \quad b^{18}q^6\left(-3x^8-36x^7+44x^6+9x^4-72x^3+28x^2+132x-96\right)+\\
&+ \quad 4b^6q^2\left(3x^8-24x^7+15x^6-9x^4+12x^3+23x^2-12x-6\right)+\\
&- \quad 6b^{12}q^4\left(x^8+14x^7-16x^6+x^4+10x^3-14x^2-8x+14\right)\Big),\\
p_9(x) \quad &:= \quad \frac{x}{\left(x^2-1\right)\left(b^6q^2+1\right)\left(b^6q^2-x^2\left(x^2+1\right)\right)}\Big(b^6q^2\left(b^6q^2(3x-4)+6x-4\right)+\\
&+ \quad 2xF_0\left(b^{12}q^4\left(x^2-3\right)+b^6q^2\left(3x^6+2x^2-3\right)+3x^6+x^2\right)\Big),\\
p_{10}(x) \quad &:= \quad \frac{-6\sqrt{3}b^9\kappa q^3}{x^4\left(x^2-1\right)\left(b^6q^2+1\right)^2\left(-q^2b^6+x^4+x^2\right)}\Big(x^2\left(2x^5-3x^4-2x+3\right)+\\
&+ \quad b^6q^2\left(x^7-3x^6-3x^3+6x^2+8x-7\right)-b^{12}q^4\left(x^3-3x^2-4x+7\right)+\\
&+ \quad 4xF_0\left(b^{12}q^4\left(3x^2-4\right)-b^6q^2\left(x^6-6x^2+4\right)-x^2\left(x^4-3\right)\right)\Big)
\end{aligned}
$$

Obecność członów $1/(1-x^2)$ w H_1, H_3, H_4 może sugerować potencjalną osobliwość na horyzoncie zewnętrznym. W rzeczywistości jednak, śledząc dokładnie zachowanie powyższych funkcji w pobliżu horyzontu oraz wykorzystując własności funkcji F_2 można pokazać, że faktycznie żadnych osobliwości tam nie ma (w istocie stałe całkowania zostały dobrane w taki sposób, by fakt ten zagwarantować).

Dodatek C

Horyzont wewnętrzny

Ogólne wyrażenie na pozycję wewnętrznego horyzontu zdarzeń dane jest przez (6.54). Odpowiednie współczynniki funkcyjne wynoszą:

$$
\begin{aligned}
h_1 &= \frac{b^4 r_-^5 K_1\left(br_-\sqrt{b^2r_-^2+1}, br_-\right)}{-2b^4r_-^4+b^2r_-^2+1} - \frac{b^3r_-^4\left(5b^2r_-^2+4\right)}{3\left(b^2r_-^2+2\right)\left(-2b^4r_-^4+b^2r_-^2+1\right)^2},\\
h_2 &= \frac{1}{60b^2r_-}\left(\frac{24\kappa^2\left(b^2r_-^2+1\right)^2}{\left(b^4r_-^4+b^2r_-^2+1\right)^2} + \frac{5\left(-9b^4r_-^4+2b^2r_-^2+2\right)}{2b^4r_-^4-b^2r_-^2-1}\right),\\
h_3 &= \frac{b^2r_-^3}{12\left(-2b^4r_-^4+b^2r_-^2+1\right)},\\
h_4 &= -\frac{r_-^3\left(b^3r_-^2+b\right)^2}{4\left(b^2r_-^2+2\right)^2\left(b^4r_-^4+b^2r_-^2+1\right)\left(2b^4r_-^4-b^2r_-^2-1\right)^3}\Big(-12b^5r_-^5+82b^4r_-^4-4b^3r_-^3+\\
&+ 32b^2r_-^2+8+8b^{13}r_-^{13}+32b^{12}r_-^{12}+18b^{11}r_-^{11}+80b^{10}r_-^{10}+b^9r_-^9+130b^8r_-^8-11b^7r_-^7+\\
&+ 122b^6r_-^6\Big)+\frac{b^4r_-^5{F_0}^2\left(br_-\sqrt{b^2r_-^2+1}, br_-\right)}{-4b^4r_-^4+2b^2r_-^2+2}+\frac{b^4r_-^5K_4\left(br_-\sqrt{b^2r_-^2+1}, br_-\right)}{-2b^4r_-^4+b^2r_-^2+1}+\\
&- \frac{b^3r_-^4\left(4b^6r_-^6+7b^4r_-^4+5b^2r_-^2+2\right)F_0\left(br_-\sqrt{b^2r_-^2+1}, br_-\right)}{\left(b^2r_-^2+2\right)\left(-2b^4r_-^4+b^2r_-^2+1\right)^2},\\
h_5 &= \frac{b^4r_-^5K_5\left(br_-\sqrt{b^2r_-^2+1}, br_-\right)}{-2b^4r_-^4+b^2r_-^2+1}+\frac{b^3r_-^4\left(4b^{10}r_-^{10}+11b^8r_-^8+20b^6r_-^6+21b^4r_-^4+12b^2r_-^2+4\right)}{4\left(-2b^4r_-^4+b^2r_-^2+1\right)^2\left(b^6r_-^6+3b^4r_-^4+3b^2r_-^2+2\right)},\\
h_6 &= \frac{b^4r_-^5K_6\left(br_-\sqrt{b^2r_-^2+1}, br_-\right)}{-2b^4r_-^4+b^2r_-^2+1}+\\
&- \frac{\sqrt{3}\kappa r_-\left(b^2r_-^2+1\right)^{3/2}\left(2b^4r_-^4+b^2r_-^2+1\right)\left(4b^4r_-^4+3b^2r_-^2+2\right)}{\left(-2b^4r_-^4+b^2r_-^2+1\right)^2\left(b^6r_-^6+3b^4r_-^4+3b^2r_-^2+2\right)}\\
&- \frac{\sqrt{3}b\kappa r_-^2\left(b^2r_-^2+1\right)^{3/2}F_0\left(br_-\sqrt{b^2r_-^2+1}, br_-\right)}{2b^8r_-^8+b^6r_-^6-2b^2r_-^2-1}.
\end{aligned}
$$

Niektóre funkcje w powyższych wzorach, takie jak $K_4\left(br_-\sqrt{b^2r_-^2+1}, br_-\right)$ są osobliwe. W istocie, na horyzoncie wewnętrznym, poczynając od pierwszego rzędu w rozwinięciach gradientowych, metryka i potencjał wektorowy stają się osobliwe. Dla przykładu, współczynnik funkcyjny z pierwszego rzędu F_2 może być przedstawiony następująco:

$$\begin{aligned} F_2 &= \int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x(1+x+x^2)}{(1+x)(-b^6q^2+x^2+x^4)} = \\ &\int_{br}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x(1+x+x^2)}{(1+x)(x-br_-)(x+br_-)(1+b^2r_-^2+x^2)}. \end{aligned}$$

Jak widać ostatnie wyrażenie jest osobliwe w granicy $r \to r_-$, co implikuje, że F_2 rozbiega się na horyzoncie wewnętrznym. To samo dotyczy innych funkcji drugiego rzędu, takich jak K_4 czy K_5.

Dodatek D

Ekspansje

Współczynniki funkcyjne $\theta_{(\ell)}^{(k)}$ we wzorze (6.60) wynoszą[1]:

$$
\begin{aligned}
\theta_l^1 &= 3brK_1 - 2b^2Br^2F_2{F_2}' + \frac{3}{2}b^2Br^2{L_1}', \\
\theta_l^2 &= \frac{5b^6q^2r^2 + b^4\left(4r^6 - 7q^2\right) + 5r^2}{4b^5r^7} + \frac{3b^3\kappa^2q^4}{5r^9\left(b^6q^2+1\right)^2\left(b^4q^2 - b^2r^4 - r^2\right)}\Big(\\
&+ 10b^{20}q^4r^{10} - 5b^{18}q^4r^8 - 5b^{16}q^4r^6 + 5b^{14}q^2r^4\left(q^2 + 2r^6\right) + 5b^{12}q^2r^2\left(q^2 - 4r^6\right) + \\
&- 4b^{10}\left(2q^4 + 5q^2r^6\right) + 12b^8q^2r^4 + 9b^6\left(2q^2r^2 - r^8\right) - b^4\left(8q^2 + 9r^6\right) + 13b^2r^4 + 13r^2\Big), \\
\theta_l^3 &= \frac{1}{4br}, \\
\theta_l^4 &= \frac{b^7q^2}{32r\left(b^6q^2-2\right)^3\left(b^6q^2+1\right)^2\left(1-b^2r^2\right)\left(-b^6q^2+b^2r^2+b^4r^4\right)}\Big(\\
&\ 18b^8q^2r^4\left(b^6q^2-2\right)\left(b^6q^2+1\right)\left(b^6q^2+2\right)^2 - 12br^3\left(b^6q^2+1\right)^2\left(b^{18}q^6 + 14b^{12}q^4 + 12b^6q^2 + 8\right) + \\
&- 32b^4r^6\left(b^6q^2+1\right)^2\left(b^{12}q^4 - 7b^6q^2 - 2\right) + 16b^4\left(b^6q^3+q\right)^2\left(b^{12}q^4 + 8b^6q^2 + 4\right) + \\
&- r^2\left(b^6q^2\left(9b^{24}q^8 + 214b^{18}q^6 + 580b^{12}q^4 + 456b^6q^2 + 64\right) + 64\right) + \\
&+ 12b^5r^7\left(b^6q^2+1\right)\left(b^{18}q^6 + 14b^{12}q^4 + 12b^6q^2 + 8\right) + \\
&- 12b^5q^2r\left(b^6q^2+1\right)\left(b^{18}q^6 - 18b^{12}q^4 - 20b^6q^2 + 8\right)\Big) + \\
&+ \frac{b^2F_0}{4\left(b^6q^2-2\right)\left(b^6q^2+1\right)\left(1-b^2r^2\right)\left(-b^6q^2+b^2r^2+b^4r^4\right)}\Big(2b^{18}q^6r^2 - 3b^{17}q^6r + \\
&+ 2b^{16}\left(q^6 - 5q^4r^6\right) + 6b^{10}\left(q^4 - q^2r^6\right) - 6b^6q^2r^2 + 12b^5q^2r + 4b^4\left(q^2 + r^6\right) - 4r^2\Big) + \\
&+ 3brK_4 + \frac{b^3q\left(b^6q^2+1\right)}{b^6q^2-2}\frac{\partial F_0}{\partial(b^3q)} + \frac{3}{2}b^2Br^2{L_4}' + \frac{b^3r^3\left(b^6q^2 - 3b^4r^4 + 1\right){F_0}^2}{2\left(1-b^2r^2\right)\left(-b^6q^2+b^2r^2+b^4r^4\right)},
\end{aligned}
$$

[1]Prim oznacza pochodną po br.

$$
\begin{aligned}
\theta_l^5 &= -\frac{1}{2}F_0 + 3brK_5 + \frac{3}{2}b^2Br^2{L_5}' - \frac{b^5q^2\left(3b^7q^2r + 4b^6q^2 + 6br + 4\right)}{8r\left(b^6q^2-2\right)\left(b^6q^2+1\right)}, \\
\theta_l^6 &= \frac{3\sqrt{3}b^3\kappa q^3}{4r^6\left(b^6q^2-2\right)\left(b^6q^2+1\right)^2\left(b^4q^2-b^2r^4-r^2\right)}\Big(2b^{23}q^6r^7 + b^{17}q^4r\left(q^2+6r^6\right) + 4b^{16}q^4r^6 - 3b^{15}q^4r^5 \\
&- 4b^{14}q^2r^{10} - 3b^{13}q^4r^3 - 4b^{12}q^2r^8 + 4b^{11}q^2r^7 + 4b^{10}q^2\left(q^2+r^6\right) - 6b^9q^2r^5 - 4b^8r^4\left(q^2+r^6\right) + \\
&- 6b^7q^2r^3 - 4b^6r^2\left(q^2+r^6\right) - 4b^5q^2r + 4b^4q^2 - 4b^2r^4 - 4r^2\Big) + 3brK_6 + \frac{3}{2}b^2Br^2{L_6}'. \qquad \text{(D.1)}
\end{aligned}
$$

Współczyniki $\theta_n^{(k)}$ wynoszą

$$
\begin{aligned}
\theta_n^1 &= 2F_2{F_2}' - \frac{3}{2}{L_1}', \\
\theta_n^2 &= \frac{1}{b^3r^3} + \frac{6b^2\kappa^2q^4}{5r^7\left(b^6q^2+1\right)^2\left(-b^4q^2+b^2r^4+r^2\right)^2}\Big(\\
&\quad b^3(9b^8q^4 + 10b^{12}q^2r^{10}(b^6q^2+1) + r^4(5b^{12}q^4 - 28b^6q^2 - 6) + \\
&+ b^4r^8(5b^6q^2(b^6q^2-2) - 6) + 2b^4q^2r^2(5b^6q^2-4) - 6b^2r^6(5b^6q^2+2))\Big), \\
\theta_n^3 &= 0, \\
\theta_n^4 &= \frac{b^7q^2r^3}{16\left(b^6q^2-2\right)^3\left(b^6q^2+1\right)^2\left(b^2r^2-1\right)^2\left(-b^4q^2+b^2r^4+r^2\right)^2}\Big(\\
&\quad 18b^8q^2r^4\left(b^6q^2-2\right)\left(b^6q^2+1\right)\left(b^6q^2+2\right)^2 + 12br^3\left(b^6q^2+1\right)^2\left(b^{18}q^6 + 14b^{12}q^4 + 12b^6q^2 + 8\right) + \\
&+ 16b^4r^6\left(b^6q^2+1\right)^2\left(b^{12}q^4 + 8b^6q^2 + 4\right) + 32b^4q^2\left(b^6q^2+1\right)^2\left(2b^{12}q^4 + b^6q^2 + 2\right) + \\
&- r^2\left(b^6q^2\left(57b^{24}q^8 + 262b^{18}q^6 + 436b^{12}q^4 + 216b^6q^2 - 32\right) + 64\right) + \\
&- 12b^5r^7\left(b^6q^2+1\right)\left(b^{18}q^6 + 14b^{12}q^4 + 12b^6q^2 + 8\right) + \\
&- 12b^5q^2r\left(b^6q^2+1\right)\left(3b^{18}q^6 + 10b^{12}q^4 + 4b^6q^2 + 24\right)\Big) + \\
&- \frac{b^2r^4F_0}{2\left(b^6q^2-2\right)\left(b^6q^2+1\right)\left(b^6q^2r^2 - b^4\left(q^2+r^6\right) + r^2\right)^2}\Big(-2b^4q^2(2 + 9b^6q^2 + 7b^{12}q^4) + \\
&+ 3b^5q^2(-4 + b^{12}q^4)r - 2b^4(2 + 3b^6q^2 + b^{12}q^4)r^6 + 2(2 + 5b^6q^2)(r + b^6q^2r)^2\Big) + \\
&- \frac{b^3r^5\left(2b^6q^2r^2 - 3b^4q^2 + 2r^2\right){F_0}^2}{\left(b^6q^2r^2 - b^4\left(q^2+r^6\right) + r^2\right)^2} + \frac{2b^5qr^4\left(b^6q^2+1\right)}{\left(b^6q^2-2\right)\left(b^2r^2-1\right)\left(b^4q^2-b^2r^4-r^2\right)}\frac{\partial F_0}{\partial(qb^3)} - \frac{3}{2}{L_4}',
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta_n^5 &= -\frac{3}{2}{L_5}' + \frac{F_0}{2b^2 B r^2} + \frac{b^3 q^2 \left(-3b^7 q^2 r + 4b^6 q^2 - 6br + 4\right)}{8Br^3 \left(b^6 q^2 - 2\right)\left(b^6 q^2 + 1\right)}, \\
\theta_n^6 &= \frac{\sqrt{3} b^5 \kappa q^3}{2r^2 \left(b^6 q^2 - 2\right)\left(b^6 q^2 + 1\right)\left(-b^4 q^2 + b^2 r^4 + r^2\right)^2} \Big(6b^{15} q^4 r^5 + 3b^{13} q^4 r^3 + 4b^{12} q^4 r^2 + 8b^{10} q^4 + \\
&+ 12b^9 q^2 r^5 - 12b^8 q^2 r^4 + 6b^7 q^2 r^3 + b^6 \left(12r^8 - 8q^2 r^2\right) - 4b^4 \left(q^2 - 6r^6\right) + 24b^2 r^4 + 12r^2 \Big) + \\
&+ \frac{\sqrt{3} b^6 \kappa q^3}{2r^2 \left(b^6 q^2 + 1\right)^2 \left(b^2 r^2 - 1\right)\left(-b^4 q^2 + b^2 r^4 + r^2\right)^2} \Big(\\
& \quad 12r \left(-b^{10} q^4 + b^8 q^2 r^4 + b^6 q^2 r^2 - b^4 q^2 + b^2 r^4 + r^2\right) F_0 + \\
&+ b^3 q^2 \left(b^4 r^4 + b^2 r^2 + 1\right)\left(3b^7 q^2 r - 4b^6 q^2 + 6br - 4\right) \Big) - \frac{3}{2}{L_6}'\,.
\end{aligned}
\tag{D.2}
$$

Bibliografia

[1] Juan Martin Maldacena. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:231–252, 1998.

[2] Edward Witten. Anti-de Sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:253–291, 1998.

[3] S. S. Gubser, Igor R. Klebanov, and Alexander M. Polyakov. Gauge theory correlators from non-critical string theory. *Phys. Lett.*, B428:105–114, 1998.

[4] Ofer Aharony, Steven S. Gubser, Juan Martin Maldacena, Hirosi Ooguri, and Yaron Oz. Large N field theories, string theory and gravity. *Phys.Rept.*, 323:183–386, 2000.

[5] Jorge Casalderrey-Solana, Hong Liu, David Mateos, Krishna Rajagopal, and Urs Achim Wiedemann. Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions. 2011.

[6] John McGreevy. Holographic duality with a view toward many-body physics. 2009.

[7] Stanislaw Mrowczynski. Quark - gluon plasma. *Acta Phys.Polon.*, B29:3711, 1998.

[8] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics, Second Edition: Volume 6 (Course of Theoretical Physics)*. Butterworth-Heinemann, 2 edition, January 1987.

[9] Rudolf Baier, Paul Romatschke, Dam Thanh Son, Andrei O. Starinets, and Mikhail A. Stephanov. Relativistic viscous hydrodynamics, conformal invariance, and holography. *JHEP*, 04:100, 2008.

[10] Mukund Rangamani. Gravity & Hydrodynamics: Lectures on the fluid-gravity correspondence. *Class. Quant. Grav.*, 26:224003, 2009.

[11] Paul Romatschke. Relativistic Viscous Fluid Dynamics and Non-Equilibrium Entropy. *Class. Quant. Grav.*, 27:025006, 2010.

[12] Sangyong Jeon and Laurence G. Yaffe. From quantum field theory to hydrodynamics: Transport coefficients and effective kinetic theory. *Phys.Rev.*, D53:5799–5809, 1996.

[13] Edward Shuryak. Physics of Strongly coupled Quark-Gluon Plasma. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 62:48–101, 2009.

[14] Ulrich W. Heinz. The Strongly coupled quark-gluon plasma created at RHIC. *J.Phys.*, A42:214003, 2009.

[15] M.P. Lombardo. Lattice QCD at finite temperature and density. *Mod.Phys.Lett.*, A22:457–472, 2007.

[16] Harvey B. Meyer. Transport Properties of the Quark-Gluon Plasma: A Lattice QCD Perspective. *Eur.Phys.J.*, A47:86, 2011.

[17] R. C. Myers and S. E. Vazquez. Quark Soup al dente: Applied Superstring Theory. *Class. Quant. Grav.*, 25:114008, 2008.

[18] Alina Czajka and Stanislaw Mrowczynski. N=4 Super Yang-Mills Plasma. *Phys.Rev.*, D86:025017, 2012.

[19] Alina Czajka and Stanislaw Mrowczynski. Collisional Processes in Supersymmetric Plasma. *Phys.Rev.*, D84:105020, 2011.

[20] Alina Czajka and Stanislaw Mrowczynski. Collective Excitations of Supersymmetric Plasma. *Phys.Rev.*, D83:045001, 2011.

[21] Alina Czajka and Stanislaw Mrowczynski. Supersymmetric QED Plasma. *Acta Phys.Polon.Supp.*, 5:917–924, 2012.

[22] Veronika E. Hubeny, Shiraz Minwalla, and Mukund Rangamani. The fluid/gravity correspondence. 2011.

[23] Bihn Zhou and Chuan-Jie Zhu. The Complete black brane solutions in D-dimensional coupled gravity system. 1999.

[24] Jyotirmoy Bhattacharya, Sayantani Bhattacharyya, and Shiraz Minwalla. Dissipative Superfluid dynamics from gravity. 2011. * Temporary entry *.

[25] Sayantani Bhattacharyya, Veronika E Hubeny, Shiraz Minwalla, and Mukund Rangamani. Nonlinear Fluid Dynamics from Gravity. *JHEP*, 02:045, 2008.

[26] Sayantani Bhattacharyya, R. Loganayagam, Ipsita Mandal, Shiraz Minwalla, and Ankit Sharma. Conformal Nonlinear Fluid Dynamics from Gravity in Arbitrary Dimensions. *JHEP*, 12:116, 2008.

[27] K. Becker, M. Becker, and J.H. Schwarz. String theory and M-theory: A modern introduction. 2007.

[28] Matthias R. Gaberdiel. An Introduction to conformal field theory. *Rept.Prog.Phys.*, 63:607–667, 2000.

[29] R. Loganayagam. Entropy Current in Conformal Hydrodynamics. *JHEP*, 05:087, 2008.

[30] Johanna Erdmenger, Michael Haack, Matthias Kaminski, and Amos Yarom. Fluid dynamics of R-charged black holes. *JHEP*, 0901:055, 2009.

[31] Nabamita Banerjee, Jyotirmoy Bhattacharya, Sayantani Bhattacharyya, Suvankar Dutta, R. Loganayagam, et al. Hydrodynamics from charged black branes. *JHEP*, 1101:094, 2011.

[32] Sean A. Hartnoll. Lectures on holographic methods for condensed matter physics. *Class. Quant. Grav.*, 26:224002, 2009.

[33] Mirjam Cvetic and Steven S. Gubser. Thermodynamic stability and phases of general spinning branes. *JHEP*, 9907:010, 1999.

[34] Andrew Chamblin, Roberto Emparan, Clifford V. Johnson, and Robert C. Myers. Charged AdS black holes and catastrophic holography. *Phys.Rev.*, D60:064018, 1999.

[35] Dumitru Astefanesei, Nabamita Banerjee, and Suvankar Dutta. (Un)attractor black holes in higher derivative AdS gravity. *JHEP*, 0811:070, 2008.

[36] Mirjam Cvetic and Steven S. Gubser. Phases of R charged black holes, spinning branes and strongly coupled gauge theories. *JHEP*, 9904:024, 1999.

[37] Grzegorz Plewa and Michal Spalinski. On the gravity dual of strongly coupled charged plasma. *JHEP*, 1305:002, 2013.

[38] Robert C. Myers, Miguel F. Paulos, and Aninda Sinha. Holographic Hydrodynamics with a Chemical Potential. *JHEP*, 06:006, 2009.

[39] Sayantani Bhattacharyya et al. Forced Fluid Dynamics from Gravity. *JHEP*, 02:018, 2009.

[40] Dam T. Son and Piotr Surowka. Hydrodynamics with Triangle Anomalies. *Phys. Rev. Lett.*, 103:191601, 2009.

[41] Michal P. Heller, Romuald A. Janik, and Przemyslaw Witaszczyk. The characteristics of thermalization of boost-invariant plasma from holography. *Phys.Rev.Lett.*, 108:201602, 2012.

[42] Michal P. Heller, Romuald A. Janik, and Przemyslaw Witaszczyk. A numerical relativity approach to the initial value problem in asymptotically Anti-de Sitter spacetime for plasma thermalization - an ADM formulation. *Phys.Rev.*, D85:126002, 2012.

[43] Michal P. Heller, Romuald A. Janik, and Przemyslaw Witaszczyk. On the character of hydrodynamic gradient expansion in gauge theory plasma. *Phys.Rev.Lett.*, 110:211602, 2013.

[44] Sayantani Bhattacharyya et al. Local Fluid Dynamical Entropy from Gravity. *JHEP*, 06:055, 2008.

[45] Paul Romatschke. New Developments in Relativistic Viscous Hydrodynamics. *Int. J. Mod. Phys.*, E19:1–53, 2010.

[46] Sayantani Bhattacharyya. Constraints on the second order transport coefficients of an uncharged fluid. *JHEP*, 1207:104, 2012.

[47] Jacob D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys.Rev.*, D7:2333–2346, 1973.

[48] Ivan Booth and Stephen Fairhurst. The first law for slowly evolving horizons. *Phys. Rev. Lett.*, 92:011102, 2004.

[49] Ivan Booth. Black hole boundaries. *Can. J. Phys.*, 83:1073–1099, 2005.

[50] Ivan Booth, Michal P. Heller, Grzegorz Plewa, and Michal Spalinski. On the apparent horizon in fluid-gravity duality. *Phys.Rev.*, D83:106005, 2011.

[51] Grzegorz Plewa and Michal Spalinski. Entropy currents from holography in hydrodynamics with charge. *JHEP*, 1307:062, 2013.

[52] Pau Figueras, Veronika E. Hubeny, Mukund Rangamani, and Simon F. Ross. Dynamical black holes and expanding plasmas. *JHEP*, 04:137, 2009.

[53] Ivan Booth, Michal P. Heller, and Michal Spalinski. Black brane entropy and hydrodynamics: the boost-invariant case. *Phys. Rev.*, D80:126013, 2009.

[54] Ivan Booth, Michal P. Heller, and Michal Spalinski. Black Brane Entropy and Hydrodynamics. *Phys. Rev.*, D83:061901, 2011.

[55] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. The Large scale structure of space-time. Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

[56] Eric Gourgoulhon and Jose Luis Jaramillo. A 3+1 perspective on null hypersurfaces and isolated horizons. *Phys.Rept.*, 423:159–294, 2006.

[57] Kasper Peeters. A field-theory motivated approach to symbolic computer algebra. *CoRR*, abs/cs/0608005, 2006.

[58] Kasper Peeters. Introducing Cadabra: A symbolic computer algebra system for field theory problems. 2007.

[59] Gerard 't Hooft. A Planar Diagram Theory for Strong Interactions. *Nucl.Phys.*, B72:461, 1974.

[60] Juan Martin Maldacena. Black holes in string theory. 1996.

[61] Leonard Susskind. The World as a hologram. *J. Math. Phys.*, 36:6377–6396, 1995.

[62] Gerard 't Hooft. The Holographic principle: Opening lecture. pages 72–86, 1999.

[63] Edward Witten. Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:505–532, 1998.

[64] Massimo Bianchi, Daniel Z. Freedman, and Kostas Skenderis. Holographic Renormalization. *Nucl. Phys.*, B631:159–194, 2002.

[65] M. Henningson and K. Skenderis. The holographic Weyl anomaly. *JHEP*, 07:023, 1998.

[66] Vijay Balasubramanian and Per Kraus. A stress tensor for anti-de Sitter gravity. *Commun. Math. Phys.*, 208:413–428, 1999.

[67] S.W. Hawking. Black hole explosions. *Nature*, 248:30–31, 1974.

[68] S. W. Hawking. Particle Creation by Black Holes. *Commun. Math. Phys.*, 43:199–220, 1975.

[69] Jacob D. Bekenstein. Generalized second law of thermodynamics in black hole physics. *Phys.Rev.*, D9:3292–3300, 1974.

[70] J.D. Bekenstein. Black holes and the second law. *Lett.Nuovo Cim.*, 4:737–740, 1972.

[71] S.W. Hawking. Quantum Gravity and Path Integrals. *Phys.Rev.*, D18:1747–1753, 1978.

[72] Ivan Booth and Jonathan Martin. On the proximity of black hole horizons: lessons from Vaidya. *Phys. Rev.*, D82:124046, 2010.

[73] Ivan Booth and Stephen Fairhurst. Isolated, slowly evolving, and dynamical trapping horizons: geometry and mechanics from surface deformations. *Phys. Rev.*, D75:084019, 2007.

[74] Erik Schnetter and Badri Krishnan. Non-symmetric trapped surfaces in the schwarzschild and vaidya spacetimes. *Physical Review D*, 73:021502(R), 2006.

[75] Abhay Ashtekar and Gregory J. Galloway. Some uniqueness results for dynamical horizons. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 9:1–30, 2005.

[76] Michael Haack and Amos Yarom. Nonlinear viscous hydrodynamics in various dimensions using AdS/CFT. *JHEP*, 10:063, 2008.

[77] Sebastian de Haro, Sergey N. Solodukhin, and Kostas Skenderis. Holographic reconstruction of spacetime and renormalization in the AdS/CFT correspondence. *Commun. Math. Phys.*, 217:595–622, 2001.

[78] Jerome P. Gauntlett, Eoin O Colgain, and Oscar Varela. Properties of some conformal field theories with M-theory duals. *JHEP*, 0702:049, 2007.

[79] Jerome P. Gauntlett and Oscar Varela. Consistent Kaluza-Klein reductions for general supersymmetric AdS solutions. *Phys.Rev.*, D76:126007, 2007.