

Wielkie odbicie oraz inflacja w zmodyfikowanych i kwantowych teoriach grawitacji

Autoreferat

I. IMIĘ I NAZWISKO

Ewa Czuchry

II. POSIADANE STOPNIE NAUKOWE

- Doktor nauk fizycznych w zakresie fizyki, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, rok 2003. Tytuł rozprawy doktorskiej: *Geometria frontu świetlnego i jej zastosowanie do opisu dynamiki pola grawitacyjnego*.
- Magister, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, rok 1998. Tytuł pracy magisterskiej: *Multipole w teoriach typu Kaluza-Kleina*.

III. INFORMACJE O DOTYCHCZASOWYM ZATRUDNIENIU W JEDNOSTKACH NAUKOWYCH

- Adiunkt, Narodowe Centrum Badań Jądrowych, 2015–obecnie.
- Fizyk, Instytut Problemów Jądrowych (obecnie Narodowe Centrum Badań Jądrowych), 2007–2014.
- Starszy wykładowca, Katedra Metod Matematycznych Fizyki, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, 2006–2007.
- Adiunkt, Katedra Metod Matematycznych Fizyki, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, 2005–2006.
- Staż naukowy, Yukawa Institute for Theoretical Physics, Kyoto University, 2003–2005.
- Pracownik naukowo-techniczny Katedra Metod Matematycznych Fizyki, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, 2002–2003.

IV. WSKAZANIE OSIĄGNIĘCIA WYNIKAJĄCEGO Z ART. 16 UST. 2 USTAWY Z DNIA 14 MARCA 2003 R. O STOPNIACH NAUKOWYCH I TYTULE NAUKOWYM ORAZ O STOPNIACH I TYTULE W ZAKRESIE SZTUKI (DZ. U. NR 65, POZ. 595 ZE ZM.)

A. Tytuł osiągnięcia naukowego – jednotematycznego cyklu publikacji

Wielkie odbicie oraz inflacja w zmodyfikowanych i kwantowych teoriach grawitacji

B. Jednotematyczny cykl publikacji (w porządku chronologicznym)

- H1:** E. Czuchry, *Inflationary predictions at small gamma*, Phys. Lett. B **678**, 9 (2009).
- H2:** E. Czuchry, *The phase portrait of a matter bounce in Hořava-Lifshitz cosmology*, Class. Quantum Grav. **28**, 085011 (2011).
- H3:** E. Czuchry, *Bounce scenarios in the Sotiriou-Visser-Weinfurtner generalization of the projectable Hořava-Lifshitz gravity*, Class. Quantum Grav. **28**, 125013 (2011).
- H4:** E. Czuchry and W. Piechocki, *Bianchi IX model: Reducing phase space*, Phys. Rev. D **87**, 084021 (2013).
- H5:** H. Bergeron, E. Czuchry, J.-P. Gazeau, P. Małkiewicz, and W. Piechocki, *Smooth Quantum Dynamics of Mixmaster Universe*, Phys. Rev. D **92**, Rapid Communication, 061302R (2015).
- H6:** H. Bergeron, E. Czuchry, J.-P. Gazeau, P. Małkiewicz, *Spectral properties of the quantum Mixmaster universe*, Phys. Rev. D **96**, 043521 (2017).

C. Omówienie celu naukowego wyżej wymienionych prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.

1. Wprowadzenie

Standardowy model kosmologii Wielkiego Wybuchu – Λ CDM – rozwiązuje dużo spornych kwestii współczesnej kosmologii. Wyjaśnia on mikrofalowe promieniowanie tła (CMB), obserwowaną strukturę wielkoskalową oraz przyspieszanie ekspansji Wszechświata. Mimo tych sukcesów niektóre zagadnienia pozostają ciągle nierozwiązane. Najważniejszym z nich jest problem początkowej osobliwości, w której załamują się prawa Teorii Względności, oraz era inflacji, która wymaga wprowadzenia dodatkowego pola skalarnego.

Aby uniknąć istnienia początkowej osobliwości, próbowano zmodyfikować teorię grawitacji Einsteina lub stworzyć jej kwantowy odpowiednik, który miał „wygładzić” klasyczną niekompletną strukturę. Próby rozwiązania tego problemu obejmują scenariusze branowe ([1, 2]) oraz model ekpyrotyczny/cykliczny ([3–5]), gdzie wszechświat przechodzi od ery niestającego kurczenia się do ery ekspansji bez przejścia przez osobliwość, a także kosmologia pętlowa [6]. Istnieją również teorie z dodatkowymi polami skalarnymi lub teorie grawitacji z poprawkami wyższego rzędu w działaniu (przegląd w pracy [7]) oraz zaproponowana całkiem niedawno zmodyfikowana teoria grawitacji Hořavy-Lifshitza (HL) [8].

Dwie prace [H2] i [H3] należące do osiągnięcia naukowego są poświęcone badaniom nad występowaniem kosmologicznego odbicia i jego stabilności w zmodyfikowanej teorii grawitacji Hořavy.

Odbicie w niepróżniowej kosmologii HL zostało dość dobrze zbadane dla modelu jednorodnego i izotropowego. Jednak możliwe odchylenia od izotropii mogą stać się dominujące we Wszechświecie początkowym, o małej objętości, tak jak to się dzieje w klasycznej teorii grawitacji [9, 10]. Zatem następny krok, który należy podjąć w badaniach nad kosmologicznym odbiciem to analiza efektów anizotropii w kosmologii w ramach scenariusza BKL (od nazwisk Belinskii, Khalatnikov i Lifshitz). Dodanie zmiennych anizotropowych i związanego

z nimi „ścianania” (shear), może sprawić, że odbicie będzie niestabilne, prowadząc być może do chaotycznego zachowania BKL w czasie kolapsu. Z drugiej strony mogą one zapobiec skurczeniu się Wszechświata do osobliwości, a tym samym uniknąć Wielkiego Krachu (Big Crunch), który pojawia się w niektórych rozwiązaniach. Prace [H4]–[H6] są skupione wokół kwantowego opisu najwcześniejszego wszechświata opisanego klasyczną teorią grawitacji.

Natomiast prace [H1] i częściowo [H2] oraz [H3] koncentrują się bardziej na epoce inflacji. W pracy [H1] opisano konstrukcję narzędzi łączących różne modele inflacji z wielkościami obserwacyjnymi, natomiast [H2]–[H3] omawia model inflacji napędzanej czystą grawitacją zmodyfikowanej teorii Hořavy-Lifshitz.

2. Odbicie w zmodyfikowanych teoriach grawitacji (prace [H2]–[H3])

Grawitacja Hořavy [8] jest propozycją modyfikacji standardowej teorii grawitacji. Ta proponowana teoria ma w reżimie wysokich energii punkt stały z anizotropowym skalowaniem Lifshitz między współrzędnymi przestrzennymi a czasem i w związku z tym nazywana jest teorią Hořavy-Lifshitz (HL). Wkrótce po opublikowaniu tej teorii znaleziono wiele jej konkretnych rozwiązań, w tym kosmologicznych ([11]). Stwierdzono również, że analog równania Friedmanna w grawitacji HL zawiera człon, które skaluje się w taki sam sposób jak ciemne promieniowanie w scenariuszach branowych [11] i daje negatywny wkład w gęstość energii. Tak więc teoretycznie jest możliwe uzyskanie nieosobliwej ewolucji kosmologicznej w ramach teorii Hořavy. W pracy [12] zbadano propagację liniowych perturbacji kosmologicznych poprzez odbicie i wykazano, że ich ewolucja pozostaje nieosobliwa, pomimo osobliwości w punkcie odbicia pojawiających się w równaniach ruchu dla tych perturbacji. Podczas odbicia zostaje też zachowana niezmienniczość względem skalowania dla spektrum zaburzeń – bez potrzeby inflacji. W związku z tym wydaje się, że w ramach grawitacji HL istnieje realistyczny scenariusz kosmologicznego odbicia.

Metryka przestrzeni w teorii Hořavy-Lifshitz, w związku z anizotropowym skalowaniem, ma postać (3 + 1)-dekompozycji wziętej z formalizmu ADM:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij}(dx^i - N^i dt)(dx^j - N^j dt), \quad (1)$$

gdzie N , N_i oraz g_{ij} są zmiennymi dynamicznymi.

Działanie grawitacyjne składa się z sumy członów: kinetycznego \mathcal{L}_0 oraz potencjalnego \mathcal{L}_1 (w tak zwanej formie równowagi szczegółowej – terminologii zaczerpniętej z teorii procesów stochastycznych, dokładniej dotyczących równań Markowa) [8]:

$$\begin{aligned} I &= \int dt d^3x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1), \\ \mathcal{L}_0 &= \sqrt{g}N \left\{ \frac{2}{\kappa^2} (K_{ij}K^{ij} - \lambda K^2) + \frac{\kappa^2 \mu^2 (\Lambda R - 3\Lambda^2)}{8(1 - 3\lambda)} \right\}, \\ \mathcal{L}_1 &= \sqrt{g}N \left\{ \frac{\kappa^2 \mu^2 (1 - 4\lambda)}{32(1 - 3\lambda)} R^2 - \frac{\kappa^2}{2\omega^4} Z_{ij}Z^{ij} \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie $K_{ij} = \frac{1}{N} [\frac{1}{2}\dot{g}_{ij} - \nabla_{(i}N_{j)}]$ jest krzywizną zewnętrzną hiperpowierzchni stałego czasu, kropka oznacza pochodną względem czasu t a pochodne kowariantne zdefiniowane są względem metryki przestrzennej g_{ij} , $Z_{ij} = C_{ij} - \frac{\mu\omega^2}{2}R_{ij}$. Tutaj κ^2 , λ , μ , ω oraz Λ są stałymi a

tensor Cottona, C_{ij} , jest zdefiniowany jako

$$C^{ij} = \epsilon^{ikl} \nabla_k \left(R^j_l - \frac{1}{4} R \delta_l^j \right) = \epsilon^{ikl} \nabla_k R^j_l - \frac{1}{4} \epsilon^{ikj} \partial_k R. \quad (3)$$

Materia może być dodana poprzez wprowadzenie pola skalarного φ ([11]) o gęstości energii ρ oraz ciśnieniu p . Działanie tej materii jest następujące:

$$I_m = \int dt d^3x \sqrt{g} N \mathcal{L}_m. \quad (4)$$

Lagranżjan materii \mathcal{L}_m jest funkcją pola skalarного φ oraz 4-wymiarowej metryki:

$$\mathcal{L}_m = \frac{3\lambda - 1}{2} \left(\frac{1}{2N^2} (\dot{\varphi}^2 - N^i \partial_i \varphi) - V(\varphi) \right). \quad (5)$$

To pozwala zdefiniować gęstość energii oraz ciśnienie w następujący sposób:

$$\rho = \frac{3\lambda - 1}{4} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad (6)$$

$$p = \frac{3\lambda - 1}{4} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \quad (7)$$

W obliczeniach numerycznych zaprezentowanych poniżej została przyjęta konkretna postać potencjału pola skalarного (zob. równanie (13)).

Porównanie działania teorii Hořavy-Lifshitza z działaniem Einsteina pozwala uzyskać wyrażenia na prędkość światła c , stałą Newtona G i stałą kosmologiczną Λ_E :

$$c = \frac{\kappa^2 \mu}{4} \sqrt{\frac{\Lambda}{1 - 3\lambda}}, \quad G = \frac{\kappa^2 c}{32\pi}, \quad \Lambda_E = -\frac{3\kappa^4 \mu^2 \Lambda^2}{3\lambda - 1 \cdot 32}, \quad (8)$$

Przyjęcie wartości $\lambda = 1$, redukuje pierwsze trzy człony w (2) do zwykłych członów teorii względności a Lagranżjan materii (4) do zwykłego działania pola skalarного w zakrzywionej czasoprzestrzeni.

Równania kosmologii Hořavy-Lifshitza uzyskuje się poprzez narzucenie warunku jednorodności i izotropii metryki w równaniach ruchu. Dokładniej, równania ruchu uzyskuje się poprzez wariację działania (2) względem N , a oraz φ i przyjęciu $N = 1$ pod koniec obliczeń, co daje:

$$H^2 = \frac{\kappa^2 \rho}{6(3\lambda - 1)} + \frac{\kappa^4 \mu^2 \Lambda}{8(3\lambda - 1)^2} \frac{k}{a^2} - \frac{\kappa^4 \mu^2}{16(3\lambda - 1)^2} \left(\Lambda^2 + \frac{k^2}{a^4} \right), \quad (9)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2(\rho + p)}{4(3\lambda - 1)} - \frac{\kappa^4 \mu^2 \Lambda}{8(3\lambda - 1)^2} \frac{k}{a^2} + \frac{\kappa^4 \mu^2}{32(3\lambda - 1)^2} \frac{k^2}{a^4}, \quad (10)$$

a także równanie ewolucji pola skalarного:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{2}{3\lambda - 1} V' = 0, \quad (11)$$

gdzie $H = \dot{a}/a$, a apostrof ' oznacza pochodną względem pola skalarного φ . Istotnymi nowymi członami w powyższych równaniach ruchu są człony rzędu $(1/a^4)$ po prawej stronie

równań (9) i (10). Przypominają one przyczynek od ciemnego promieniowania w kosmologii branowej [13] i są obecne tylko wtedy, gdy krzywizna przestrzenna metryki nie zanika.

Te nowe człony w równaniach kosmologicznych wprowadzają możliwość istnienia odbicia. Postać równania (9), z $k = \pm 1$ oznacza, że możliwe jest $H = 0$ w pewnym momencie czasu. Jest to warunek niezbędny do realizacji odbicia. W pracy [11] pokazano, że może się to zdarzyć w obecności materii, w krytycznym momencie czasu t_* , $a = a_*$, gdy krytyczna gęstość energii osiąga wartość

$$\rho = \rho_* = \frac{3\kappa^2\mu^2}{2} \left(-\frac{\Lambda k}{4 a_*^2} + \frac{\Lambda^2}{8} + \frac{1 k^2}{8 a_*^4} \right), \quad (12)$$

określoną przez stałe sprzężenia teorii.

Moje rozważania zaczynają się w fazie kurczenia się. Na początku współczynnik skali jest dość duży, a udział ciemnego promieniowania w całości gęstości energii jest dość mały. Gdy wszechświat się kurczy, gęstość energii wzrasta, a współczynnik skali szybko maleje. Gdy gęstość krytyczna zostaje osiągnięta, następuje odbicie.

Wybrałam opisanie sektora materii w okresie przed odbiciem za pomocą pola skalarnego φ z potencjałem kwadratowym:

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2. \quad (13)$$

Dla uproszczenia rachunków położyłam $m = 1$. Przyjęłam także $\alpha = 2/\kappa^2$ (sama wartość κ^2 może być wyrażona za pomocą stałych kosmologicznych (8)), oraz wybrałam układ jednostek taki, że $8\pi G = 1$ oraz $c = 1$. Wtedy

$$\kappa^2 = 32\pi Gc, \quad (14)$$

a wartości μ są dowolne. Stała sprzężenia λ jest bezwymiarowa, jej istotnym fenomenologicznie zakresem jest $\infty > \lambda \geq 1$. Ponadto, jeśli chcemy pozostać w reżimie niskich energii, możemy uprościć dalsze obliczenia i przyjąć wartość $\lambda = 1$.

Równania Friedmanna przyjmują zatem następującą postać w pobliżu odbicia:

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{\mu^2 k^2}{2a^4}, \quad (15)$$

$$H^2 = \frac{1}{6}(\dot{\varphi}^2 + \varphi^2) - \frac{\mu^2 k^2}{4a^4}. \quad (16)$$

Dodatkowo dynamikę systemu uzupełniają: równanie ruchu dla pola skalarnego oraz definicja parametru Hubble'a:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2}{3\lambda - 1}\varphi - 3\dot{\varphi}H, \quad (17)$$

$$\dot{a} = aH. \quad (18)$$

Jeśli $k \neq 0$ można również rozważyć podukład w zmiennych (φ, u, H) , uzyskany poprzez redukcję oryginalnego systemu względem więzów (16). Mianowicie, podstawiając

$$\frac{\mu^2 k^2}{4a^4} = \frac{1}{6}(u^2 + \varphi^2) - H^2 \quad (19)$$

do równania na \dot{H} i pomijając równanie na dynamikę samego czynnika skali a można otrzymać następujący układ równań:

$$u = \dot{\varphi}, \quad (20)$$

$$\dot{u} = -\varphi - 3uH, \quad (21)$$

$$\dot{H} = \frac{1}{3}\left(\varphi^2 - \frac{u^2}{2}\right) - 2H^2. \quad (22)$$

Jest to zredukowany trójwymiarowy podukład zmiennych (φ, u, H) . Jeśli chcemy uzyskać również dynamikę a , to musimy dodać do tego układu równanie $\dot{a} = aH$, a także równanie więzów (16).

Lokalna geometria portretu fazowego jest określona rodzajem i położeniem jego punktów krytycznych. Te punkty to miejsca, w których pochodne wszystkich zmiennych dynamicznych, tj. prawe strony równań (20)–(22), znikają. Co więcej, są to jedyne punkty, w których trajektorie fazowe mogą się zaczynać, kończyć lub przecinać. Mogą one również zaczynać się lub kończyć w nieskończoności, a następnie – po odpowiedniej transformacji współrzędnych rzutującej przestrzeń fazową na zbiór zwarty (tzw. projekcja Poincaré) – można otrzymać dobrze określone nieskończone punkty krytyczne. Zestaw skończonych i nieskończonych punktów krytycznych oraz ich charakterystyka wynikająca z właściwości macierzy Jacobiego równań dynamiki w tych punktach, zapewnia dobrze określony opis danego układu dynamicznego.

Przepisując równania (20)–(22) za pomocą zmiennych

$$x \equiv \varphi; \quad y \equiv \dot{\varphi}; \quad z \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad (23)$$

dostajemy trzy równania ewolucji:

$$\dot{x} = y, \quad (24)$$

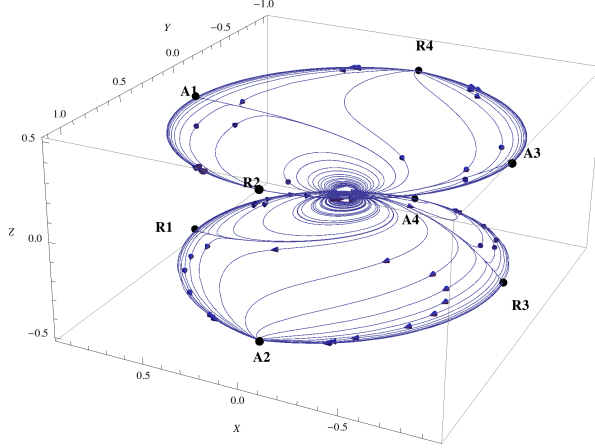
$$\dot{y} = -x - 3yz, \quad (25)$$

$$\dot{z} = \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{y^2}{2}\right) - 2z^2. \quad (26)$$

Przestrzenią rozwiązań powyższego układu dynamicznego jest trójwymiarowy rejon przestrzeni (x, y, z) . Ten obszar jest ograniczony przez dwuwymiarową przestrzeń trajektorii płaskiego wszechświata ($k = 0$). Powierzchnia ograniczająca jest stożek o równaniu $z^2 = \frac{1}{6}(x^2 + y^2)$, jego górna część odpowiada ekspansji a dolna kontrakcji. Obie części łączą się w punkcie $(0, 0, 0)$, który jest punktem krytycznym. Dlatego też nie ma trajektorii przechodzących z dolnej części stożka do górnej.

Dla $k = \pm 1$ wszystkie trajektorie fazowe znajdują się pomiędzy powierzchniami tego stożka. Równania (20)–(22) zawierają tylko wyrazy kwadratowe w krzywiznie, zatem ich rozwiązania są takie same dla niezerowych wartości k : $k = -1$ lub $k = 1$. Stożek ten jest także powierzchnią ograniczającą dla trajektorii odpowiadających dużym wartościom a . Im dalej trajektorie leżą od tego stożka, tym mniejsze są wzdłuż niej wartości a .

Rysunki 2a–2f przedstawiają portrety fazowe opisane przeze mnie w pracy [H2]. Mają one inną strukturę niż w standardowej kosmologii. Widzimy np. w porównaniu do wyników z pracy [14], że istnieją dodatkowe punkty odpychające w części odpowiadającej kontrakcji i ich lustrzane odbicia w części opisującej ekspansję. Ich obecność pozwala na istnienie odbicia, ponieważ są teraz możliwe nowe rodziny trajektorii, zaczynające się od dodatkowych



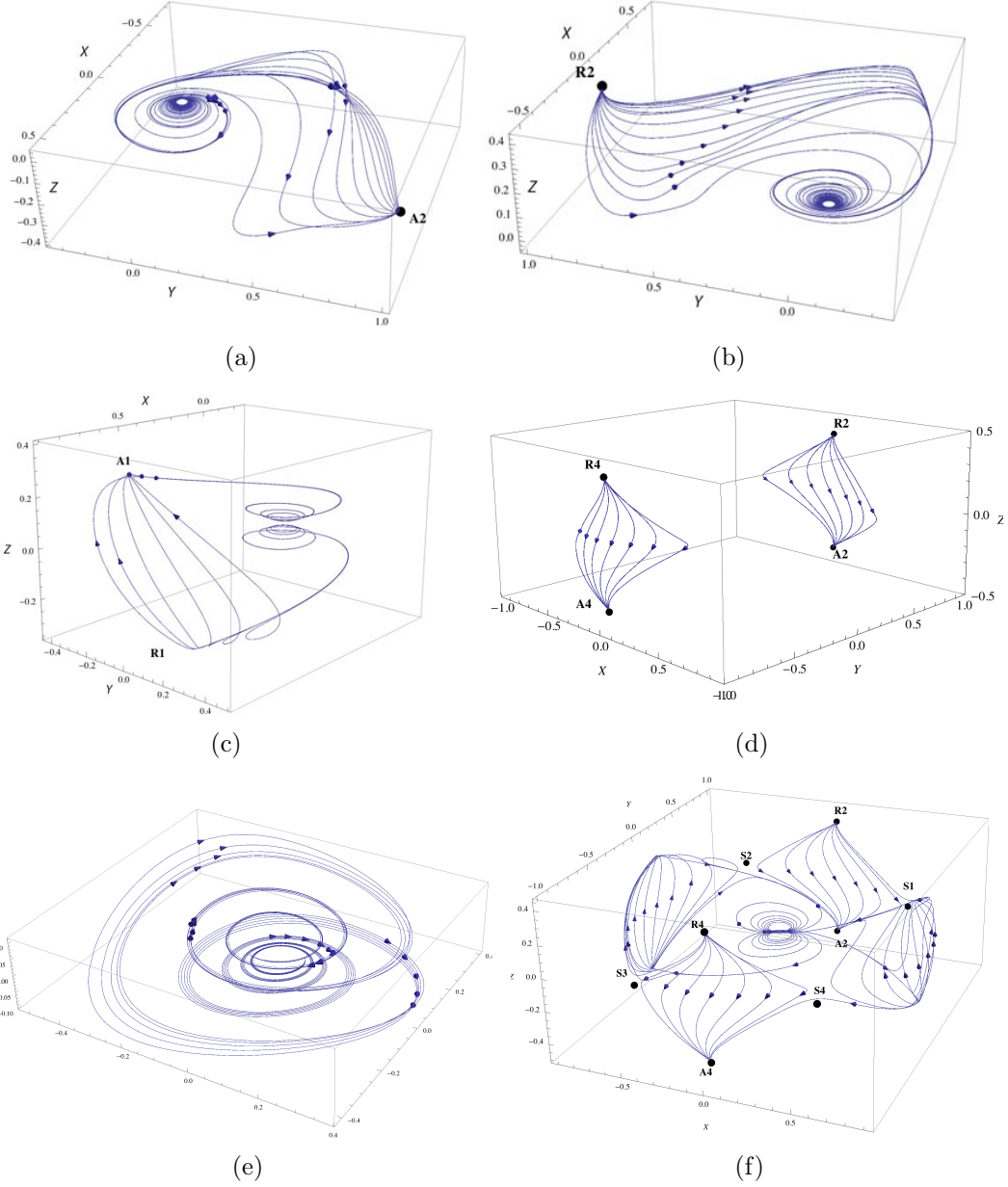
Rysunek 1. Trajektorie fazowe płaskiego wszechświata Hořavy-Lifshitz.

punktów odpychających i ewentualnie kończące się na nowych atraktorach w rozszerzającej się części, lub wokół punktu $(0, 0, 0)$, który jest teraz punktem stacjonarnym (w standardowej kosmologii jest środkiem). Trajektorie te stanowią realizacje odbicia. Najciekawszy scenariusz zawiera okres szybkiego kurczenia się, a po odbiciu okres przyspieszonej ekspansji, która może pasować do scenariusza inflacyjnego.

Niemniej są też jednak warunki początkowe, które prowadzą do Wielkiego Krachu, jak pokazano na rysunkach 2a i 2d, lub które zaczynają się od początkowej osobliwości (rys. 2b i 2d). Stąd istnienie odbicia nie jest generyczne dla teorii Hořavy i zależy od warunków początkowych.

Kolejną interesującą klasą rozwiązań są wszechświaty quasi stacjonarne. Te rozwiązania są opisane w przestrzeni fazowej przez orbity zamknięte, okrążające punkt krytyczny $(0, 0, 0)$ – centrum. Wszystkie trajektorie w sąsiedztwie tego punktu okazują się być zamkniętymi orbitami, „zdeformowanymi okręgami”. Równania ruchu nie pozwalają na istnienie orbit zamkniętych położonych dokładnie na płaszczyźnie $z = \text{const.}$, co skutkuje lekką deformacją tych orbit. Wartości H oscylują wokół stanu stacjonarnego, dla wystarczająco małych wartości φ i $\dot{\varphi}$. Wartości czynnika skali a podczas tej ewolucji są znacznie większe niż rejon, w którym nasze uproszczenia są dopuszczalne. Dlatego zachowanie to nie jest cechą teorii Hořavy-Lifshitz, ale kosmologii ze zmodyfikowanymi równaniami ruchu, tj. z dodatkowym członem $\sim 1/a^4$ w równaniach Friedmanna.

Wizualizacje przedstawione w pracy [H2] opisują dynamikę wszechświata Hořavy-Lifshitz w reżimie małego współczynnika skali a , gdy standardowe człony z krzywizną oraz stałą kosmologiczną Λ są zaniedbywalne. Nawet w tak ograniczonym zakresie odpowiadają one na pytanie o możliwe scenariusze realizujące odbicie i na ile są one ogólne dla teorii. Wygląda na to, że nie, ponieważ znalazłam rozwiązania prowadzące do nieskończonego kurczenia się lub zaczynające się od początkowej osobliwości, wszystkie w rejonie małego czynnika skali a . Istnieje również interesująca możliwość wszechświata quasi stacjonarnego i oscylującego, którego istnienie wynika bezpośrednio z członu ciemnego promieniowania w równaniach Friedmanna.



Rysunek 2. Różne typy trajektorii fazowych dla zakrzywionego wszechświata Hořavy-Lifshitz.

Odbicie kosmologiczne w uogólnionej przez Sotiriou, Vissera i Weinfurtnera grawitacji Hořavy-Lifshitz (praca [H3])

Działanie grawitacyjne zapisane w formie „równowagi szczegółowej” (2) zawiera człony co najwyżej kwadratowe w krzywiznie. Jednakże najbardziej ogólna i renormalizowalna teoria zawiera również człony w trzecich potęgach, jak to zostało wykazane w pracy [11]. Wychoząc z tego założenia Sotiriou, Visser i Weinfurtnier ([15]) zbudowali teorię z warunkiem rzutowalności $N = N(t)$, tak jak w oryginalnej teorii Hořavy, ale bez warunku „równowagi szczegółowej” (upraszczającego równania teorii HL). Dało to równania Friedmanna z

dodatkowymi członami $\sim 1/a^6$:

$$H^2 = \frac{2}{(3\lambda - 1)} \left(\frac{\rho}{3} + \sigma_1 + \sigma_2 \frac{k}{a^2} + \sigma_3 \frac{k^2}{a^4} + \sigma_4 \frac{k}{a^6} \right), \quad (27)$$

$$\dot{H} = \frac{2}{(3\lambda - 1)} \left(-\frac{p}{2} - \frac{\rho}{2} - \sigma_2 \frac{k}{a^2} - 2\sigma_3 \frac{k^2}{a^4} - 3\sigma_4 \frac{k}{a^6} \right). \quad (28)$$

Wartości stałych σ_3, σ_4 są dowolne. Aby równania te były zbieżne do równań Friedmanna w reżimie niskich energii $\lambda = 1$ i dla dużych a (człony proporcjonalne do $1/a^4$ i $1/a^6$ są wtedy zaniedbywalne) należy przyjąć $\sigma_1 = \Lambda/3$ oraz $\sigma_2 = -1$. Zatem powyższe równania przyjmują postać:

$$H^2 = \frac{2}{(3\lambda - 1)} \left(\frac{\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \sigma_3 \frac{k^2}{a^4} + \sigma_4 \frac{k}{a^6} \right), \quad (29)$$

$$\dot{H} = \frac{2}{(3\lambda - 1)} \left(-\frac{\rho(1+w)}{2} + \frac{k}{a^2} - 2\sigma_3 \frac{k^2}{a^4} - 3\sigma_4 \frac{k}{a^6} \right), \quad (30)$$

przy czym użyto równania stanu $p = w\rho$.

Nowe człony, proporcjonalne do $1/a^6$, które występują w analogach równań Friedmanna, są podobne jak dla nieściślej materii (tzn. takiej, że $\rho = p$ i $\rho_{\text{stiff}} \sim 1/a^6$). Człony te są pomijalnie małe dla dużych a , ale mogą odgrywać znaczącą rolę dla małych wartości czynnika skali.

W pracy [H3] dokonałam szczegółowej analizy struktury fazowej kosmologii HL z i bez warunku „równowagi szczegółowej”. Oba te modele zawierają w analogach równań Friedmanna człony ciemnego promieniowania proporcjonalne do $1/a^4$. W związku z tym jest możliwe, aby dla zakrzywionego wszechświata (tzn. $k \neq 0$) parametr Hubble’a przyjmował wartość $H = 0$ w pewnym momencie czasu, co jest warunkiem koniecznym dla istnienia odbicia. Porównując trajektorie faz uzyskane w tych modelach próbowałam odpowiedzieć na pytanie, w jaki sposób uogólnienia grawitacji Hořavy wpływają na występowanie i zachowanie się rozwiązań z odbiciem. Dodatkowy człon $1/a^6$, który pojawia się w równaniach Friedmanna w modelu Sotiriou, Vissera i Weinfurtnera (SVW), jest dowolnego znaku, a zatem może ewentualnie skompensować człon $1/a^4$ (generyczny dla grawitacji HL) prowadząc do osobliwości.

Okazało się, że największe różnice między teorią Hořavy i jej uogólnieniami pojawiają się dla małych wartości parametru skali a i parametru Hubble’a H . Nie jest to zaskakujące, ponieważ człon SVW $1/a^6$ jest istotny tylko dla małych wartości a i staje się zaniedbywalny dla większych.

W oryginalnym sformułowaniu Hořavy mogą występować dwa skończone punkty krytyczne, jeden z nich to centrum a drugi to siodło. Wokół centrum znajdują się zamknięte orbity odpowiadające oscylującemu wszechświatowi, tj. przechodzące przez ciągle cykle kurczenia się, odbicia i ekspansji. Owe orbity przypominają rozwiązania quasi-stacjonarne przedstawione w pracy [H2]. Są one fizycznie interesujące albo dla zamkniętego wszechświata z dodatnią stałą kosmologiczną, albo dla otwartego wszechświata z $k = 1$ i ujemną stałą kosmologiczną Λ . Druga klasa rozwiązań oscylujących, o znikającej gęstości materii $\rho = 0$, pojawia się, dla $k/\Lambda > 0$. Dodatkowo istnieje trzeci scenariusz odbicia wokół liniowego centrum, a dla niektórych wartości parametrów nie ma rozwiązań z odbiciem.

W kosmologii SVW HL, z dodatkowym członem występującym w analogach równań Friedmanna, mogą istnieć 0, 1, 2 lub 3 skończone punkty krytyczne. Punktami krytycznymi mogą być stabilne centra – otoczone zamkniętymi orbitami, opisujące oscylujące wszechświaty lub niestabilne siodła. Istnieją również rozwiązania z orbitami wokół liniowego centrum w

nieskończoności, gdzie podobnie jak w pierwotnej teorii HL, wszechświat zaczyna się od stanu statycznego i nieskończonego, kurczy się do skończonego rozmiaru, po odbiciu rozszerza się do stanu statycznego i nieskończonego. Tak więc istnieje tylko jeden cykl, bez dalszych oscylacji. Istnieją również zbiory wartości parametrów, znacznie większe niż w pierwotnej teorii HL, które nie pozwalają na istnienie skończonych punktów krytycznych, prowadzących tylko do rozwiązań z osobliwością.

Najważniejszą cechą oscylujących (i zawierających odbicie) rozwiązań w ujęciu SVW jest istnienie dwóch centrów, z siodłem pomiędzy nimi (trzy skończone punkty krytyczne), występujące dla niektórych wartości parametrów. W bardziej realistycznej sytuacji, która obejmuje dynamiczną zmianę parametru stanu, możliwe byłoby przejście z jednego oscylującego rozwiązania z odbiciem na inne. W obu modelach, pierwotnej grawitacji HL i jej uogólnienia SVW, istnieją klasy parametrów, które nie pozwalają na ewolucję bez osobliwości. Fizyczna interpretacja niektórych z tych parametrów (stałe sprzężenia σ_3 i σ_4 w modelu SVW) nadal pozostaje zagadnieniem otwartym.

3. „Rozmycie” osobliwości początkowej w anizotropowych modelach kosmologicznych (prace [H4]–[H6])

Izotropowy model Friedmanna Robertsona Walkera jest z powodzeniem stosowany do wyjaśnienia kosmologicznych danych obserwacyjnych. Jednakże izotropia przestrzeni jest dynamicznie niestabilna w otoczeniu osobliwości początkowej [9]. Poza tym, jeśli obecny Wszechświat ewoluował z fazy inflacyjnej, to w fazie przedinflacyjnej miałby być zarówno niejednorodny, jak i anizotropowy. Dynamika takiego wszechświata ekstrapolowana do tyłu w czasie staje się ultralokalna i efektywnie zachowuje się jak złożona z jednorodnych i izotropowych kawałków ewoluujących niezależnie w każdym punkcie przestrzennym. W obu przypadkach kwantyzacja samych modeli izotropowych wydaje się niewystarczająca. Oczekuje się, że kwantowa wersja modelu anizotropowego, obejmująca model Friedmanna jako szczególny przypadek, będzie lepiej opisywać najwcześniejszy Wszechświat.

Spośród różnych możliwych modeli jednorodnych model Bianchi IX wydaje się być wystarczająco ogólny do opisu ewolucji czasoprzestrzeni w pobliżu osobliwości. Dynamika próżniowego Bianchi IX (tzn. wszechświata Mixmaster [16]) nie jest całkowalna. Jednak wystarczająco blisko do osobliwości, każde rozwiązanie może być przybliżone sekwencją epok Kasnera, a przejścia między tymi epokami opisane są przez ewolucję próżniowego modelu Bianchi II. Wszechświat przechodzi nieskończoną liczbę takich chaotycznych przejść i ostatecznie zapada się w osobliwość w skończonym czasie własnym [9].

Kwantyzacja modelu Bianchi IX wymaga więc pełnego zrozumienia jej klasycznej dynamiki wyrażonej w zmiennych odpowiednich do przeprowadzenia późniejszej kwantyzacji. Taką analizę przeprowadziłam w pracy [H4]. Artykuł [H5] poświęcony jest kwantowaniu modelu Bianchi IX/Mixmaster w przybliżeniu adiabatycznym. Ostatnia publikacja z tej tematyki – [H6] – zawiera badania właściwości spektrum anizotropowej części Hamiltonianu wchodzącego w skład pełnej dynamiki kwantowej wszechświata Mixmaster. Wyniki te potwierdzają i poprawiają znane przybliżenia potencjału zmiennych anizotropowych i powinny być użyteczne w dowolnej metodzie kwantowania wszechświata Mixmaster.

Przestrzeń fazowa modelu Bianchi IX (praca [H4])

Ogólna forma metryki niediagonalnego (niepróżniowego) modelu Bianchi IX w układzie

współporuszającym się ma postać:

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{ab}(t)e_\alpha^a e_\beta^b dx^\alpha dx^\beta, \quad (31)$$

gdzie indeksy łacińskie a, b, \dots przybierają wartości od 1 do 3 i numerują wektory triady e_α^a a greckie indeksy $\alpha, \beta, \dots = 1, 2, 3$ numerują współrzędne przestrzenne.

Metryka (31) nie jest globalnie diagonalizowalna ale może zostać zdiagonalizowana w każdym momencie czasu. Według [9] dokładna 3-wymiarowa diagonalna metryka $\hat{\gamma}$ jest następująca:

$$\hat{\gamma} = \hat{R}^{-1} \hat{\Gamma} \hat{R}, \quad (32)$$

gdzie $\hat{\Gamma} = \text{diag}(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ a macierz \hat{R} jest ortogonalna. Macierz \hat{R} obraca 3-wymiarowy tensor metryczny $g_{\alpha\beta}$ względem osi głównych, obrót ten można opisać za pomocą kątów Eulera (θ, φ, ψ) . Innymi słowy $\hat{R} = \hat{R}_\theta \hat{R}_\varphi \hat{R}_\psi$, gdzie \hat{R}_θ , \hat{R}_φ oraz \hat{R}_ψ są standardowymi macierzami obrotu.

W ogólnym przypadku kąty Eulera: (θ, φ, ψ) są zależne od czasu i opisują obrót względem wektorów triady e^a , które są ustalone. W rejonie asymptotycznym kąty Eulera stają się niezależne od czasu, ale Γ_α pozostaje funkcją czasu.

Można zdiagonalizować metrykę $\hat{\gamma}$ w rejonie asymptotycznym za pomocą transformacji $\hat{R} \hat{\gamma} \hat{R}^{-1} = \hat{\Gamma}$. Ponieważ macierz \hat{R} jest tu niezależna od czasu, to diagonalna forma metryki będzie istnieć aż do osobliwości. W tym reżimie metryka (31) może być przedstawiona w następujący sposób:

$$ds^2 = dt^2 - (a^2 e_\alpha^{(1)} e_\beta^{(1)} + b^2 e_\alpha^{(2)} e_\beta^{(2)} + c^2 e_\alpha^{(3)} e_\beta^{(3)}) dx^\alpha dx^\beta, \quad (33)$$

gdzie

$$a := \Gamma_1, \quad b := \Gamma_2 C^2 \cos^2 \theta_0, \quad c := \Gamma_3 C^4 \sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0 \sin^2 \psi_0, \quad (34)$$

a C jest stałą ruchu.

Wykorzystując tożsamości Bianchi, dowolność rotacji metryki γ_{ab} i wektorów triady e_α^a , można otrzymać dobrze zdefiniowany, ale skomplikowany układ równań opisujących dynamikę niediagonalnego modelu Bianchi IX. Forma asymptotyczna (w pobliżu osobliwości kosmologicznej) tych równań jest następująca ([9]):

$$\frac{\partial^2 \ln a}{\partial \tau^2} = \frac{b}{a} - a^2, \quad \frac{\partial^2 \ln b}{\partial \tau^2} = a^2 - \frac{b}{a} + \frac{c}{b}, \quad \frac{\partial^2 \ln c}{\partial \tau^2} = a^2 - \frac{c}{b}, \quad (35)$$

gdzie a, b, c są funkcjami tylko czasu. Rozwiązania równań (35) muszą spełniać warunek:

$$\frac{\partial \ln a}{\partial \tau} \frac{\partial \ln b}{\partial \tau} + \frac{\partial \ln a}{\partial \tau} \frac{\partial \ln c}{\partial \tau} + \frac{\partial \ln b}{\partial \tau} \frac{\partial \ln c}{\partial \tau} = a^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}. \quad (36)$$

W powyższych równaniach czas kosmologiczny t został następująco przedefiniowany: $dt = \sqrt{|\det \gamma_{ab}|} d\tau$. Łatwo sprawdzić, że równania (35) mogą zostać otrzymane z lagranżowskich równań ruchu:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_I} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_I}, \quad I = 1, 2, 3, \quad (37)$$

gdzie $x_1 := \ln a$, $x_2 := \ln b$, $x_3 := \ln c$, oraz $\dot{x}_I := dx_I/d\tau$, a Lagranżjan L ma postać:

$$L := \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{x}_1 \dot{x}_3 + \dot{x}_2 \dot{x}_3 + \exp(2x_1) + \exp(x_2 - x_1) + \exp(x_3 - x_2). \quad (38)$$

Hamiltonian układu ma postać

$$H := p_I \dot{x}_I - L = \frac{1}{2}(p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3) - \frac{1}{4}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \exp(2x_1) - \exp(x_2 - x_1) - \exp(x_3 - x_2), \quad (39)$$

co prowadzi do więzów dynamicznych

$$H = 0. \quad (40)$$

Równania Hamiltona mają następującą formę:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{2}(-p_1 + p_2 + p_3), \quad (41)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2}(p_1 - p_2 + p_3), \quad (42)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2 - p_3), \quad (43)$$

$$\dot{p}_1 = 2 \exp(2x_1) - \exp(x_2 - x_1), \quad (44)$$

$$\dot{p}_2 = \exp(x_2 - x_1) - \exp(x_3 - x_2), \quad (45)$$

$$\dot{p}_3 = \exp(x_3 - x_2). \quad (46)$$

Obliczenie pochodnych (41)–(43) i użycie (44)–(46) prowadzi bezpośrednio do równania (35). Ponieważ więzy (40) są bezpośrednią konsekwencją więzów (36), sformułowania lagranżowskie oraz hamiltonowskie są całkowicie równoważne.

Układ (41)–(46) jest układem nieliniowych sprzężonych równań różniczkowych. Przestrzeń rozwiązań powyższego układu należy do \mathbb{R}^6 i jest ograniczona równaniem więzów (40). Rozwiązując (40) względem x_3 dostajemy

$$x_3 = x_2 + \log \left[-e^{2x_1} - e^{-x_1+x_2} - \frac{p_1^2}{4} + \frac{p_1 p_2}{2} - \frac{p_2^2}{4} + \frac{p_1 p_3}{2} + \frac{p_2 p_3}{2} - \frac{p_3^2}{4} \right]. \quad (47)$$

Podstawienie (47) do (41)–(46) prowadzi do

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{2}(-p_1 + p_2 + p_3), \quad (48)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2}(p_1 - p_2 + p_3), \quad (49)$$

$$\dot{p}_1 = 2e^{2x_1} - e^{-x_1+x_2}, \quad (50)$$

$$\dot{p}_2 = e^{2x_1} + 2e^{-x_1+x_2} + \frac{p_1^2}{4} - \frac{p_1 p_2}{2} + \frac{p_2^2}{4} - \frac{p_1 p_3}{2} - \frac{p_2 p_3}{2} + \frac{p_3^2}{4}, \quad (51)$$

$$\dot{p}_3 = -e^{2x_1} - e^{-x_1+x_2} - \frac{p_1^2}{4} + \frac{p_1 p_2}{2} - \frac{p_2^2}{4} + \frac{p_1 p_3}{2} + \frac{p_2 p_3}{2} - \frac{p_3^2}{4}. \quad (52)$$

Zatem zbiór punktów krytycznych S_B powyższego układu jest dany przez

$$S_B := \{(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \in \bar{\mathbb{R}}^6 \mid (x_1 \rightarrow -\infty, x_2 - x_1 \rightarrow -\infty, x_3 - x_2 \rightarrow -\infty) \wedge (p_1 = 0 = p_2 = p_3)\}, \quad (53)$$

gdzie $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Stabilność rozwiązań w tych punktach jest określona przez wartości własne jacobianu J systemu (41)–(46). Dokładniej, należy zlinearyzować równania

(41)–(46) w punktach krytycznych. Podstawienie $\vec{x} = \vec{x}_0 + \delta\vec{x}$, gdzie $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$ i zaniebanie członów wyższych rzędów w prowadzi do równania ewolucji postaci $\delta\vec{x} = J\delta\vec{x}$. Wartości własne jakobianu J opisują stabilność rozwiązań w danym punkcie.

W pracy [H4] przeanalizowałam strukturę matematyczną wyżej wymiarowej fizycznej przestrzeni fazowej niediagonalnego modelu Bianchi IX w pobliżu osobliwości kosmologicznej za pomocą metod układów dynamicznych. Krytyczne punkty równań Hamiltona są typu niehiperbolicznego, co jest ogólną cechą rozważanej dynamiki osobliwej. Redukcja kinematycznej 2-formy symplektycznej pozwala na określenie fizycznego hamiltonianu.

Ponieważ wszystkie wartości własne jakobianu J (odpowiadające nieliniowemu polu wektorowemu) są czysto urojone, nie jest możliwa redukcja do niższej wymiarowej przestrzeni fazowej. Także wszystkie punkty krytyczne są niehiperboliczne, zatem informacja uzyskana z procedury linearyzacji jest niejednoznaczna. Niehiperboliczność wydaje się być ogólną cechą rozważanej dynamiki osobliwej.

Aby poradzić sobie z niektórymi opisanymi problemami, w pracy [H4] zaproponowaliśmy zredukowanie kinematycznej symplektycznej 2-formy do powierzchni więzów, co umożliwiło otrzymanie fizycznego hamiltonianu. Ta procedura obniżyła też wymiarowość dynamiki.

Kwantyzacja modelu Bianchi IX/Mixmaster (praca [H5])

Scenariusz BKL przewiduje, że w pobliżu kosmicznej osobliwości dynamika pola grawitacyjnego może być znacznie uproszczona dzięki temu, że w równaniach Einsteina dominują pochodne czasowe nad pochodnymi przestrzennymi. Oznacza to, że ewolucja pola grawitacyjnego w tym reżimie jest ultralokalna a przestrzeń dzieli się na zbiór małych fragmentów, których dynamika jest w przybliżeniu opisywana przez modele jednorodnego typu Bianchi. Im bliżej osobliwości, tym bardziej krzywizna przestrzenna rośnie, a przestrzeń jeszcze bardziej fragmentuje się na jednorodne „łatki”. Rozmiar każdej takiej „łatki”, modelowanej najbardziej ogólnie przez model Bianchi IX, odpowiada wielkości pochodnych przestrzennych w równaniach Einsteina. Jednorodność tych fragmentów przestrzennych zachowuje się tylko na pewnym poziomie przybliżenia, zatem ewolucja nowo powstałych łatek ma nieco inne warunki początkowe.

Kwantyzacja chaotycznej dynamiki modelu Bianchi IX był już badana ([16–18]), jednak w większości tych sformułowań ciężko jest znaleźć konkretne fizyczne związania ([19, 20]).

W pracy [H5] dokonaliśmy analizy kwantowego odpowiednika modelu Bianchi IX poprzez połączenie metod kwantyzacji: kanonicznej i za pomocą afinicznych stanów koherentnych (ACS) z podejściem półklasycznym. Stosując standardowe metody przybliżeń fizyki molekularnej, założyliśmy, że ewolucja zmiennych anizotropowych może być otrzymana dzięki przybliżeniu adiabatycznemu.

Hamiltonian klasycznego próżniowego modelu Bianchi IX jest następujący

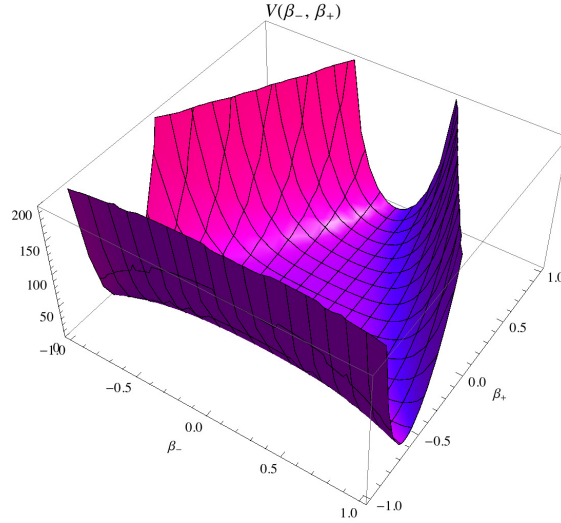
$$H = \left(\frac{2\pi G}{3c^2 a^3} (a^2 p_a^2 - p_+^2 - p_-^2) - \frac{c^4}{32\pi G} a V_n(\beta_{\pm}) \right), \quad (54)$$

gdzie G jest stałą Newtona, c prędkością światła, (a, p_a) i (β_{\pm}, p_{\pm}) są zmiennymi kanonicznie sprzężonymi (a jest czynnikiem skali a β_{\pm} zmiennymi anizotropowymi). Potencjał V_n ma postać:

$$V_n(\beta_{\pm}) = e^{-4\beta_+} \left(\left(e^{6\beta_+} - 2 \cosh(2\sqrt{3}\beta_-) \right)^2 - 4 \right). \quad (55)$$

Powższy system podlega równaniu więzów $H = 0$.

Potencjał Bianchi IX ma trzy „otwarte” kierunki symetrii C_{3v} (patrz rys. 3). Można je postrzegać jako trzy głębokie „kaniony”, coraz bardziej wąskie aż do zamknięcia krawędzi w nieskończoności.



Rysunek 3. Wykres potencjału V_n w pobliżu jego minimum. Widoczne jest ograniczenie od dołu oraz trzy symetryczne kaniony.

Przededefiniowaliśmy częściowo zmienne przestrzeni fazowej na bardziej przydatne do kwantyzacji: $(q, p) := (a^{3/2}, 2p_a/(3\sqrt{a}))$. Prowadzi to do nowej postaci Hamiltonianu (54):

$$H = \left(\frac{3\pi G}{2c^2} p^2 - H_{\pm}(q) \right), \quad (56)$$

$$H_{\pm}(q) := \frac{2\pi G}{3c^2 q^2} (p_+^2 + p_-^2) + \frac{c^4}{32\pi G} q^{2/3} V_n(\beta_{\pm}). \quad (57)$$

Wyrażenie H wygląda jak Hamiltonian fizyki molekularnej, para (q, p) pełni tu rolę zmiennych jądrowych a (β_{\pm}, p_{\pm}) zmiennych elektronowych. Jedynie stałe sprzężenie pomiędzy jądrowymi i elektronowymi stopniami swobody są w obu przypadkach różne. Zazwyczaj takie układy molekularne podlegają przybliżeniu Borna-Oppenheimera, stąd też idea takiego samego podejścia w przypadku kosmologicznym.

Pary (β_{\pm}, p_{\pm}) zostały skwantowane kanonicznie, a para (q, p) za pomocą metodą stanów koherentnych. Skwantowany Hamiltonian \hat{H} odpowiadający (56) ma postać:

$$\hat{H} = \left(\frac{3\pi G}{2c^2} \left(\hat{p}^2 + \frac{\hbar^2 \mathfrak{K}_1}{\hat{q}^2} \right) - \hat{H}_{\pm}(\hat{q}) \right), \quad (58)$$

gdzie

$$\hat{H}_{\pm}(q) = \frac{2\pi G}{3c^2} \mathfrak{K}_2 \frac{\hat{p}_+^2 + \hat{p}_-^2}{q^2} + \frac{c^4}{32\pi G} \mathfrak{K}_3 q^{2/3} V_n(\beta_{\pm}), \quad (59)$$

a $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ oraz \mathfrak{K}_3 są dodatnimi stałymi liczbowymi. Odpychający człon w potencjale $\hbar^2 \mathfrak{K}_1 \hat{q}^{-2}$ jest generowany przez kwantyzację ACS.

Zastosowanie przybliżenia Borna-Oppenheimera prowadzi do założenia, że anizotropowe stopnie swobody β_{\pm} zostają „zamrożone” w swoich stanach własnych hamiltonianu $\hat{H}_{\pm}(q)$ z

wartościami własnymi energii $E_{\pm}^{(N)}(q)$, $N = 0, 1, \dots$ i ewoluują adiabaticznie. Semiklasyczny Hamiltonian $\check{H}_N(q, p)$ jest zdefiniowany jako $\check{H}_N(q, p) = \langle \lambda q, p | \hat{H}_N | \lambda q, p \rangle$, gdzie $|q, p\rangle$ jest afinicznym stanem koherentnym. Więzy hamiltonowskie na poziomie półklasycznym ($\check{H}_N = 0$) mają postać:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + k\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \mathfrak{s}_P^2 c^2 \frac{\mathfrak{K}_4}{a^6} = \frac{8\pi G}{3} \rho(a), \quad (60)$$

gdzie

$$\mathfrak{s}_P := 2\pi G \hbar c^{-3}, \quad k := \frac{\mathfrak{K}_5}{4}, \quad \rho(a) := \hbar(N+1) \frac{\mathfrak{K}_6}{a^4}, \quad (61)$$

a $\mathfrak{K}_4 > 0$, $\mathfrak{K}_5 > 0$, oraz $\mathfrak{K}_6 > 0$ są dodatnimi stałymi liczbowymi. Dwa czony w równaniu (60) zawierające stałą Plancka \hbar są pochodzenia czysto kwantowego. Równanie to przypomina klasyczne równanie Friedmanna:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + k\left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(a), \quad (62)$$

gdzie k należy do zbioru $\{-1, 0, +1\}$ w zależności od krzywizny przestrzennej, gęstość energii $\rho \propto a^{-3}$ dla materii i $\rho \propto a^{-4}$ dla promieniowania. Z tego powodu $\rho(a)$ występujące w (60) jest interpretowane jako człon promieniowania.

Rozwiązanie (60) względem a to funkcja okresowa $a \in [a_-, a_+]$ gdzie $a_- > 0$ oraz $a_+ < \infty$, co rozwiązuje problem osobliwości modelu Bianchi IX.

Widmo energii kwantowego wszechświata Mixmaster (praca [H6])

Znajomość właściwości anizotropowej części Hamiltonianu Bianchi IX jest istotnym elementem w badaniach pełnego modelu, który obejmuje oddziaływanie zmiennych anizotropowych i izotropowych. Szczegóły takiego oddziaływania zależą od specyficznego modelu kwantyzacji izotropowego Hamiltonianu. Dynamika wynikająca z równania Wheelera-DeWitta ([16]) jest osobliwa, podczas gdy kwantyzacja zaproponowana w [H5] (oraz [P5]–[P7]) produkuje dodatkowy człon odpychający, który zastępuje klasyczną osobliwość odbiciem.

Dla każdego systemu kwantowego niezbędna jest znajomość jego pełnego widma energii. Na przykład przybliżenie adiabaticzne można rozważać tylko dla dyskretnej części widma i tylko wtedy, gdy ta dyskretna część nie jest zanurzona w ciągłym widmie. Te cechy były rozważane przez B. Simona w pracy [21]. Dlatego niezbędny jest dowód, że widmo anizotropowej części Bianchi IX jest rzeczywiście czysto dyskretne dla dowolnej objętości wszechświata. Ponadto potrzebna jest też znajomość analitycznych przybliżeń tego widma.

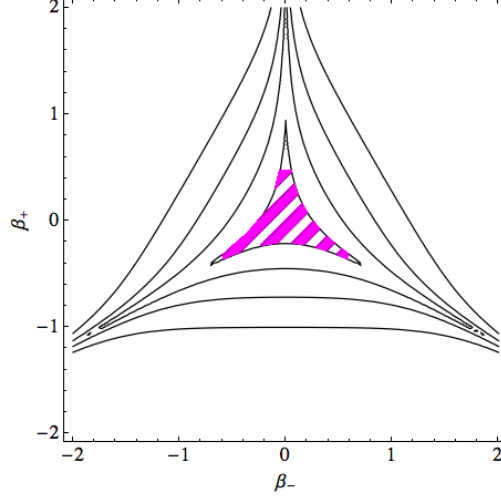
Wyniki opisane w [H6] dotyczą analitycznych właściwości widma operatora Schrödingera dla anizotropowego Hamiltonianu. Odpowiadają one geometrii Bianchi IX, powinny być zatem przydatne także do badania innych modeli kwantowych wszechświata Mixmaster.

W literaturze matematycznej istnieje ogólne kryterium, aby potencjał niezwartry generował czysto dyskretne widmo energii. Zostało ono udowodnione przez Wang i Wu w 2008 roku [22], a eleganckie i przejrzyste sformułowanie tego kryterium podał później Simon [23]. Kryterium to mówi, że operator Schrödingera w dowolnym wymiarze:

$$\hat{H} = -\Delta + V \quad (63)$$

ma czysto dyskretne widmo energii, jeśli miara Lebesgue'a $|\cdot|$ rzutu $\Omega_M(V) = \{x \mid 0 \leq V(x) < M\}$ jest skończona:

$$|\Omega_M(V)| < \infty. \quad (64)$$



Rysunek 4. Wykres konturowy potencjału anizotropii $V(\beta) = 0.8, 10, 10^2, 10^3$. Zaznaczony obszar odpowiada zwartemu nośnikowi $V(\beta) < 1$. Obszar $V(\beta) < M$ nie jest zwarty dla $M \geq 1$.

W pracy [H6] zastosowałam to kryterium, aby udowodnić, że widmo równania Schrödingera odpowiadającego Hamiltonianowi (54) jest czysto dyskretne.

W tym celu musiałam pokazać, że pole powierzchni zawierającej punkty $\beta = (\beta_+, \beta_-)$ spełniające warunek:

$$\Omega_M = \{\beta : 0 \leq V(\beta) < M\} \quad (65)$$

jest skończone, $|\Omega_M| < \infty$. W praktyce konieczne było jedynie wykazanie, że obszar ograniczony liniami ekwipotencjalnymi $V(\beta) = M$ ma skończone pole powierzchni. Kilka takich linii ekwipotencjalnych przedstawiono na rys. (4). Są one zamknięte dla wartości $M < 1$ i otwarte dla $M \geq 1$. Tak więc, aby udowodnić skończoność $|\Omega_M|$, wystarczyło rozważyć przypadek $M \geq 1$.

Linie ograniczające takie, że $V(\beta) = M \geq 1$ są parametryzowane poniższymi czterema równaniami:

$$\begin{aligned} \beta_- &= \pm \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arcosh} \frac{1}{2} \left(e^{-6\beta_+} + \sqrt{4 + 3(M-1)e^{-4\beta_+}} \right), \quad \beta_+ \in \mathbb{R} \\ \beta_- &= \pm \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arcosh} \frac{1}{2} \left(e^{-6\beta_+} - \sqrt{4 + 3(M-1)e^{-4\beta_+}} \right), \quad \beta_+ \leq X, \end{aligned} \quad (66)$$

gdzie X jest ujemnym pierwiastkiem $e^{-6\beta_+} - \sqrt{4 + 3(M-1)e^{-4\beta_+}} = 2$. Ze względu na symetrię potencjału typu C_{3v} , wystarczy udowodnić, że obszar ograniczony przez krzywe (66):

$$|\Omega_M(\beta_0)| = \frac{\sqrt{3}}{6} \int_{\beta_0}^{\infty} \operatorname{arcosh} \frac{1}{2} \left(e^{-6\beta_+} + \sqrt{4 + 3(M-1)e^{-4\beta_+}} \right) d\beta_+ \quad (67)$$

jest skończony dla $\beta_0 < \infty$. W pracy [H6] pokazałam w wyniku kolejnych przybliżeń, że:

$$\begin{aligned} |\Omega_M(\beta_0)| &< \\ \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\sqrt{\frac{3(M-1)}{2}} e^{-2\beta_0} + \frac{3(M-1)}{8} e^{-4\beta_0} + \frac{1}{3} \left[\frac{3(M-1)}{8} \right]^{\frac{3}{2}} e^{-6\beta_0} \right) &< \infty. \end{aligned} \quad (68)$$

Wynik ten „legalizuje” różne przybliżenia potencjału Bianchi IX, które usuwają trzy niezwykłe kaniony i prowadzą do uproszczenia obliczeń.

4. Zmodyfikowana inflacja (praca [H1])

Modele k-inflacji [24] modyfikują standardową inflację, wprowadzając bardziej ogólną postać członów energii kinetycznej. Ważną cechą tej inflacji jest zmiana prędkości propagacji zaburzeń pola inflatonowego, czyli prędkość dźwięku c_s .

Szczególnie interesującym przykładem jest model, który zastępuje kanoniczną energię kinetyczną przez człon typu Diraca Borna Infelda (DBI) [25]. Człon DBI energii kinetycznej zawiera pierwiastek kwadratowy, $\gamma > 1$, przypominający czynnik Lorentza ze szczególnej teorii względności. Rzeczywiście, ten pierwiastek kwadratowy wprowadza „ograniczenia prędkości” na skalar inflatonu. Szczególnie prosta i ciekawa sytuacja powstaje, gdy współczynnik γ jest stały [26], co oznacza, że prędkość dźwięku też jest stała, jak w przypadku kanonicznym, ale nie jest jednak równa prędkości światła. Ten przypadek może być uważany za wiodące przybliżenie w rozwinięciu pola względem prędkości dźwięku, o ile zakłada się, że prędkość ta zmienia się odpowiednio wolno w określonym rejonie przestrzeni.

W pracy [H1] omawiam serię często rozważanych modeli inflacji i badam, jak wrażliwe są ich przewidywania względem małych odchyień od kanonicznej postaci energii kinetycznej, mierzonych stałą $\gamma > 1$. Wyniki oszacowałam dla czasu, w którym podczas inflacji obecna skala Hubble’a przekroczyła horyzont. Omówiłam również szczegółowo wiele popularnych modeli inflacyjnych. W większości przypadków, w szczególności dla inflacji chaotycznej, wyniki dla obserwowalnych wskaźników inflacji nie zależą od γ lub zależność jest bardzo słaba. Jednakże w niektórych przypadkach inflacji modułowej otrzymałam, że tzw. współczynnik tensorowy r efektywnie rośnie z γ , można więc przypuszczać, że może stać się on z tego powodu obserwowalny.

D. Wykorzystanie wyników

Prace [H2]–[H3] opisują klasyczny mechanizm zastępujący osobliwość początkową tak zwanym Wielkim Odbiciem. W opisanych modelach istnieją stabilne i niestabilne scenariusze takiego mechanizmu. Główną wadą tych możliwości jest konieczność modyfikacji standardowej teorii grawitacji.

W pracach [H4]–[H6] zbadano anizotropowe aspekty początkowej osobliwości, opisane w ramach modelu Bianchi IX oraz możliwości „wygładzenia” osobliwości za pomocą procedury kwantyzacji. Umożliwia to usunięcie klasycznej osobliwości dzięki dodatkowemu członowi odpychającemu generowanemu przez procedurę kwantyzacji ACS. Podobny człon w analogach równania Friedmanna pojawia się także w zmodyfikowanych teoriach grawitacji opisywanych w [H2]–[H3]. Dodatkowo anizotropowe stopnie swobody pozostają w swoich najniższych stanach energetycznych podczas kwantowego odbicia. Oznacza to, że kwantowy model Friedmanna, w przeciwieństwie do swojego klasycznego odpowiednika, jest w rzeczywistości stabilny względem zaburzeń izotropowości przestrzeni, co jest bardzo ciekawym i nowatorskim rezultatem. Natomiast praca [H6] potwierdza i poprawia znane przybliżenia potencjału anizotropii modelu Bianchi IX, także te zastosowane w [H5].

Wyniki [H1] pokazują, że w większości przypadków zależność obserwabli inflacyjnych od prędkości dźwięku jest niewielka w zakresie c_s dozwolonych przez miarę niegausowskości.

Oczekuje się, że wkrótce te ograniczenia zostaną znacznie zaostrome lub dokonany zostanie ich pomiar.

Ponadto w pracach [H2]–[H3] otrzymałam rozwiązania odpowiadające bardzo przyspieszonej ekspansji wszechświata. Można rozważyć zastąpienie standardowego mechanizmu inflacji napędzanej polem inflatonowym przez mechanizm czysto grawitacyjny.

V. OMÓWIENIE POZOSTAŁYCH OSIĄGNIĘĆ NAUKOWO-BADAWCZYCH

A. Pozostałe publikacje (po otrzymaniu tytułu doktora)

P1: J. Jezierski, J. Kijowski and E. Czuchry, *Boundary data in canonical gravity and thermodynamics of black holes*, *Nuovo Cimento B* **119**, 733 (2004).

P2: E. Czuchry, J. Jezierski and J. Kijowski, *Dynamics of gravitational field within a wave front and thermodynamics of black holes*, *Phys. Rev. D* **70**, 124010 (2004).

P3: J. Kijowski and E. Czuchry, *Dynamics of a self-gravitating shell of matter*, *Phys. Rev. D* **72**, 084015 (2005).

P4: J. Kijowski and E. Czuchry, *Dynamics of a self-gravitating light-like matter shell with spherical symmetry*, *Class. Quantum Grav.* **27**, 235007 (2010).

P5: H. Bergeron, E. Czuchry, J.-P. Gazeau, P. Małkiewicz, and W. Piechocki, *Singularity avoidance in a quantum model for Mixmaster universe*, *Phys. Rev. D* **92**, 124018 (2015).

P6: H. Bergeron, E. Czuchry, J.-P. Gazeau, and P. Małkiewicz, *Nonadiabatic bounce and an inflationary phase in the quantum mixmaster universe*, *Phys. Rev. D* **93**, 124053 (2016).

P7: H. Bergeron, E. Czuchry, J.-P. Gazeau, and P. Małkiewicz, *Vibronic framework for quantum mixmaster universe*, *Phys. Rev. D* **93**, 064080 (2016).

P8: E. Czuchry, D. Garfinkle, J. R. Klauder, W. Piechocki, *Do spikes persist in a quantum treatment of spacetime singularities?*, *Phys. Rev. D* **95**, 024014 (2017).

W powyższym wykazie nie zostały uwzględnione cztery prace opublikowane przed obroną pracy doktorskiej ani też pięć publikacji konferencyjnych.

1. Omówienie wyżej wymienionych prac

Prace [P1]–[P4] zawierają materiał z mojej pracy doktorskiej oraz jej kontynuację. Opisują one lagranżowską i hamiltonowską dynamikę pola grawitacyjnego z danymi brzegowymi określonymi na hiperpowierzchniach typu świetlnego, np. na froncie falowym.

W pracy [P1] z zasady wariacyjnej Hilberta wyprowadzono dynamikę samograwitacyjnej powłoki materii a następnie opisano ją jako system hamiltonowski. Praca [P2] opisuje dynamikę pola grawitacyjnego zawartego w rejonie czasoprzestrzeni o zerowej powierzchni brzegowej S : wyprowadzona jest kompletna formuła hamiltonowska dla tej dynamiki. W

wyniku tego otrzymuje się quasi-lokalny dowód pierwszego prawa termodynamiki czarnych dziur dla przypadku gdy S jest nieekspandującym horyzontem. Z tego punktu widzenia omówione są zerowe prawo czarnych dziur oraz nierówności Penrose'a.

W pracy [P3] opisano dynamikę samograwitującej masywnej powłoki materii. Dynamika ta jest wyprowadzona z zasady wariacyjnej Hilberta, a następnie sformułowanej w postaci nieskończonego wymiarowego układu hamiltonowskiego z więzami. Metoda ta pozwala na zdefiniowanie osobliwego tensora Riemanna dla nieciągłej koneksji za pomocą standardowych wzorów geometrii różniczkowej, z pochodnymi rozumianymi w sensie dystrybucji. Zostały też udowodnione tożsamości Bianchi dla osobliwej krzywizny. Odpowiadają one prawu zachowania dla osobliwego tensora energii pędu materii. Przedyskutowano też założenia ciągłości czterowymiarowej metryki czasoprzestrzeni.

Prace te umożliwiły zaproponowanie nowatorskiego opisu hamiltonowskiego dynamiki sferycznie symetrycznej samograwitującej powłoki świetlnej [P4]. Uzyskana jest ona poprzez systematyczną redukcję przestrzeni fazowej względem więzów Gaussa-Codazziego. Hamiltonian układu (co do wartości równy masie ADM) obliczyłam bezpośrednio jako funkcję na zredukowanej przestrzeni fazowej. Podałam też geometryczną interpretację pędu kanonicznie sprzężonego z promieniem powłoki. Zostały też znalezione modele materii zgodne z dynamiką powłoki. Obliczona jest transformacja między różnymi parametryzacjami czasu. Prezentowany model miał stać się punktem wyjścia dla kwantowej grawitacji. Niedawno zacząłem stosować metodę kwantyzacji ACS (przestrzeń fazowa promienia sfery jest półpłaszczyzną) do obliczonego hamiltonianu. Skończyłam obliczenia dla grawitacyjnej fali uderzeniowej i pracuję nad włączeniem materii typu świetlnego.

Prace [P5]–[P7] są poświęcone kwantowemu modelowi wszechświata Bianchi IX, uzyskanemu dzięki przybliżeniom znanym z fizyki molekularnej: adiabaticznego przybliżenia Borna Huanga Oppenheimera oraz nieadiabaticznego wibronowego. Praca [P5] opisuje kwantowy model próżniowej dynamiki Bianchi IX uzyskany przez łączoną procedurę kwantyzacji: za pomocą stanów koherentnych (ACS) dla zmiennych izotropowych oraz kanoniczną kwantyzację Weyla dla zmiennych anizotropowych. W celu uzyskania widma energetycznego stosuje się przybliżenie adiabaticzne (Borna-Oppenheimera) dla potencjału anizotropowego rozwiniętego wokół swojego minimum (tzn. w przybliżeniu harmonicznym). Klasyczna osobliwość początkowa jest usunięta dzięki odpychającemu potencjałowi generowanemu przez kwantyzację ACS. Ta procedura pokazuje, że podczas kontrakcji skwantowana energia anizotropowych stopni swobody rośnie znacznie wolniej niż klasyczna. Co więcej, z dala od kwantowego odbicia, odtwarzany jest klasyczny rekolaps.

Artykuł [P6] jest kontynuacją pracy [P5] i zawiera analizę zaburzeń izotropii w czasie odbicia. Zaniedbanie sprzężenia zwrotnego od stanów anizotropowych pozwala uzyskać wyniki analityczne. Między innymi zidentyfikowano parametr związany z właściwościami dynamicznymi modelu kwantowego, który opisuje pewien rodzaj przejścia fazowego. Gdy parametr ten przekroczy swoją wartość krytyczną, przestaje obowiązywać przybliżenie Borna-Oppenheimera. Zastosowanie tego wyniku do prostego modelu Wszechświata wskazuje, że parametr ten rzeczywiście przekracza swoją wartość krytyczną i że zachodzi ogromna produkcja anizotropii w trakcie odbicia. To z kolei musi prowadzić do trwałej fazy przyspieszonej ekspansji, innymi słowy do fazy inflacyjnej.

Praca [P7] zawiera dalszą kontynuację poprzednich rozważań, tym razem zostało użyte nieadiabaticzne przybliżenie wibronowe, które uwzględnia pełną ewolucję stopni anizotropowych i ich sprzężenie zwrotne na dynamikę izotropowego tła. Dynamika izotropowego tła jest otrzymana półklasycznie, za pomocą metody stanów koherentnych. W granicy du-

żej objętości wszechświata ta półklasyczna dynamika pokrywa się z klasyczną. W wyniku tych rozważań otrzymuje się konsystentny układ równań na kwantowe i półklasyczne stopnie swobody, zachowując semiklasyczne więzy. Badania numeryczne potwierdzają możliwość stabilnej i adiabaticznej friedmanowskiej dynamiki kwantowej.

Ostatnia praca [P8] omawia istnienie dodatkowych struktur przestrzennych w pobliżu chaotycznej osobliwości BKL. Struktury te nazywane są „spikami” i są wynikiem klasycznej ewolucji: poszczególne punkty przestrzeni ewoluują zgodnie ze swoją specyficzną dynamiką, inną niż sąsiednich punktów. W wyniku tego w sąsiedztwie tych specyficznych punktów tworzą się ostre „ściany”. Praca [P8] próbowała odpowiedzieć na pytanie, czy te struktury pojawiają się także w kwantowej wersji teorii. W tym celu wprowadzono system hamiltonowski, opisujący dynamikę przestrzeni w pobliżu osobliwości. Zaproponowano też odpowiedni formalizm opisujący dynamikę kwantowych „spików”, oparty na kwantyzacji afinicznej. Wstępne oszacowania wskazują jednak na nieistnienie tych struktur w kwantowej wersji teorii.

VI. LITERATURA

-
- [1] R. Maartens, Living Rev. Rel. **7** (2004).
 - [2] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999).
 - [3] J. Khoury, B.A. Ovrut, P. J. Steinhardt, and N. Turok, Phys. Rev. D, **64** 123522 (2001); E. I. Buchbinder, J. Khoury and B. A. Ovrut, Phys. Rev. D **76**, 123503 (2007).
 - [4] P. J. Steinhardt and N. Turok, Science **296**. no. 5572, 1436 (2002); Phys. Rev. D **65**, 126003 (2002); Phys. Rev.D **66**, 101302 (2002).
 - [5] R. Kallosh, L. Kofman and A. D. Linde, Phys. Rev. D **64**, 123523 (2001).
 - [6] A. Ashtekar, T. Pawłowski and P. Singh, Phys. Rev. Lett. **96**, 14130 (2006); Phys. Rev. D **73**, 124038 (2006); Phys. Rev. D **74**, 084003 (2006).
 - [7] M. Novello and S. E. Perez, Phys. Rept. **463**, 127 (2008).
 - [8] P. Hořava, Phys. Rev. D **79**, 084008 (2009); Phys. Rev. Lett. **102**, 161301 (2009).
 - [9] V. A. Belinskii, I. M. Khalatnikov, and E. M. Lifshitz, Adv. Phys. **19**, 525 (1970); Adv. Phys. **31**, 639 (1982).
 - [10] T. Damour, M. Henneaux, H. Nicolai, Class. Quantum Grav. **20**, R145 (2003).
 - [11] G. Calcagni, JHEP **0909**, 112 (2009); E. Kiritsis and G. Kofinas, Nucl. Phys. B **821**, 467 (2009).
 - [12] R. Brandenberger, Phys. Rev. D **80**, 043516 (2009).
 - [13] P. Binétruy, C. Deffayet, U. Ellwanger and D. Langlois, Phys. Lett. B **477**, 285 (2000).
 - [14] G. N. Felder, A. Frolov, L. Kofman and A. Linde, Phys. Rev. D **66**, 023507 (2002).
 - [15] T. P. Sotiriou, M. Visser and S. Weinfurtner, Phys. Rev. Lett. **102**, 251601(2009); JHEP **0910**, 03 (2009).
 - [16] C. W. Misner, Phys. Rev. Lett. **22**, 1071 (1969); Phys. Rev. **186**, 1319 (1969).
 - [17] M. Bojowald and G. Date, Phys. Rev. Lett. **92**, 071302 (2004).
 - [18] E. Wilson-Ewing, Phys. Rev. D **82**, 043508 (2010).
 - [19] D. Marolf, Class. Quantum Grav. **12** (1995) 1441.
 - [20] V. Moncrief and M. Ryan, Phys. Rev. D **44**, 2375 (1991).

- [21] B. Simon, Ann. of Math. **97**, 247 (1973).
- [22] F.-Y. Wang, J.-L. Wu, Bull. Sci. Math. **132**, 679 (2008).
- [23] B. Simon, Methods Funct. Anal. Topology **15**, 61 (2009).
- [24] C. Armendariz-Picon, T. Damour and V. F. Mukhanov, Phys. Lett. B **458**, 209 (1999); J. Garriga and V. F. Mukhanov, Phys. Lett. B **458**, 219 (1999).
- [25] E. Silverstein and D. Tong, Phys. Rev. D **70**, 103505 (2004); M. Alishahiha, E. Silverstein and D. Tong, Phys. Rev. D **70**, 123505 (2004).
- [26] M. Spaliński, JCAP **0804**, 002 (2008).

Eve Cuck